

ELEKTRISCHE NETWERKEN I

door

PROF. DR. K. M. ADAMS

V O O R W O O R D

Deze leidraad bevat de stof van de theorie der elektrische netwerken die gedurende de laatste jaren aan elektrotechnische studenten van het eerste studiejaar aan de Technische Hogeschool te Delft is gedoceerd.

Voor deze categorie studenten is getracht reeds aan de aanvang van hun studie niet alleen de mogelijkheden te scheppen de nodige rekenkundige vaardigheid te ontwikkelen, maar ook een inleiding in de theoretische denkwijze te geven, zoals deze in de elektrotechniek voorkomt, zonder dat te zware eisen aan de wiskundige kennis en wetenschappelijke rijpheid van de beginnende student worden gesteld.

Bepaalde delen van de stof, welke bij een eerste bestudering weggelaten kunnen worden, zijn cursief gedrukt. Voor het einde van het derde studiejaar, en in vele gevallen nog eerder, zal de student in aanraking met deze stof zijn geweest en de noodzaak hebben gevoeld zich deze stof eigen te maken. Dit geldt vooral voor hoofdstuk 8.

In de tekst zijn bepaalde woorden onderstreept. Hiermee wordt aangegeven dat een nieuw begrip wordt ingevoerd of dat een bekend woord met een speciale betekenis voor het eerst gebruikt wordt.

Het is essentieel dat tijdens de studie regelmatig aan het oplossen van specifieke vraagstukken wordt geoefend. De hierbij behorende stof is te vinden in "Vraagstukken Elektrische Netwerken I" van Ir. W. Buijze.

Bij de totstandkoming van de colleges elektrische netwerken I heb ik dankbaar gebruik van de kennis en ervaring van anderen kunnen maken. In het bijzonder hebben de visie en de gedetailleerde commentaren op de eerste versie van deze leidraad van Prof.dr.ir. B.D.H. Tellegen tot aanmerkelijke verbeteringen geleid. Ook hebben Ir. W.Buijze Ir. A. Henderson met hun concepten van bepaalde delen en hun didactische opmerkingen veel tot het geheel bijgedragen.

Voor eventuele opmerkingen en correcties houd ik mij gaarne aanbeveler

INHOUD

HOOFDSTUK I : INLEIDING

	blz.
1.1. Stroom en spanning	1
1.2. Energie en vermogen	3
1.3. Eenheden	5
1.4. Richting en polariteit	6
1.5. Tekenafpraak	6
1.5.1.	6
1.5.2.	7
1.5.3.	9
1.6. Weerstand	9
1.7. Bronnen	10
1.7.1. De ideale spanningsbron	11
1.7.2. De ideale stroombron	12
1.7.3.	12
1.8. Netwerken en de wetten van Kirchhoff	14
1.8.1.	14
1.8.2.	15
1.9. Serie- en parallelschakelingen	17
1.9.1. Serie-schakeling	17
1.9.2. Parallelschakeling	18
1.9.3.	19
1.10 Laddernetwerk	20
1.11 Spannings- en stroomdeling	23
1.11.1	24
1.11.2.	24
1.11.3.	24
1.12 Maasmethode	26
1.13. Knooppuntsmethode	30

	blz.
1.13.1.	33
1.13.2.	34

HOOFDSTUK II : NETWERKSTELLINGEN EN HULPMIDDELEN BIJ
NETWERKBEREKENINGEN

2.1.	Superpositie	35
2.2.	Het Theorema van Tellegen	43
2.2.1.	Behoud van vermogen	45
2.2.2.	Het reciprociteitstheorema	46
2.3.	De theorema's van Thévenin (Helmholtz) en Norton (Mayer)	49
2.4.	Equivalentie tussen de ster- en driehoek- schakeling	54
2.4.1.	Transformatie van de ster- naar de driehoek- schakeling	54
2.4.2.	Transformatie van de driehoek naar de ster-schakeling	56
2.4.3.		58

HOOFDSTUK III : WISSELSTROMEN EN WISSELSPANNINGEN IN NETWERKEN

3.1.	Tijdafhankelijke grootheden	60
3.2.	Tekenafpraak	60
3.3.	De wetten van Kirchhoff	60
3.4.	Sinusvormige grootheden	61
3.5.	Twee sinusfuncties met gelijke frequentie	63
3.6.	Twee sinusfuncties met ongelijke frequentie	65
3.7.	Gemiddelde waarden	66

	blz.
3.8. Vermogen	67
3.8.1.	67
3.8.2. Gemiddeld vermogen	68
3.8.3.	69
3.8.4.	70
3.8.5. Effectieve grootheden	71
3.8.6. De decibel-schaal	72
3.9. De condensator en de spoel	72
3.9.1. De condensator	73
3.9.9.1.	75
3.9.2. De spoel	76
3.9.2.1.	79
3.9.3. De weerstand, condensator en spoel	79
3.9.4. De opgeslagen energie in de condensator en de spoel	80
3.10. De weerstand, condensator en spoel bij wisselspanning	82
3.10.1. De weerstand	82
3.10.2. De condensator	83
3.10.3. De spoel	83
3.11. Eenvoudige voorbeelden van netwerken met wisselgrootheden	84
 HOOFDSTUK IV : DE COMPLEXE REKENWIJZE	
4.1. Exponentiële functies	90
4.2.	92
4.3. Complexe getallen	93
4.4. Complexe stromen en spanningen	96
4.5. Analyse van netwerken met sinusvormige bronsterkten	101

	blz.	
4.5.2.	De netwerkelementen	102
4.5.3.		103
4.6.	Vermogen	107
4.7.	Wijzerdiagrammen	112
4.8.	De delen van immittanties	119
4.9.	Polaire figuren	120
HOOFDSTUK V : EIGENSCHAPPEN VAN VERSCHILLENDE NETWERKTYPEN		
5.1.	Resonantie	124
5.2.	Reactantie-schakelingen	141
5.3.	Een netwerk van Zobel	148
HOOFDSTUK VI : SYMMETRISCHE DRIEFASENSYSTEMEN		
6.1.	Inleiding	151
6.2.	Wat is de zin van driefasensystemen?	153
6.3.	Vermogen	154
6.4.	Berekening van driefasennetwerken	158
6.5.	Uitgewerkte voorbeelden met wijzerdiagrammen	162
6.6.	Slotopmerkingen	167
HOOFDSTUK VII : TRANSFORMATOREN		
7.1.	Inleiding.	169
7.1.2.	Wederzijdse inducties	170
7.2.	Energie-relaties	172
7.3.	Gekoppelde spoelen.	174
7.4.	Het teken van M; tekenafspraken	176

VI

7.5.	Koppeling en lek (spreiding)	blz. 179
7.6.	Het begrip transformator	182
7.7.	Voorbeelden van netwerken met trans- formatoren	184
7.8.	De ideale transformator	187
7.9.	Nadere eigenschappen van de ideale transformator	192
7.10.	Aanpassing bij passieve netwerken	196

HOOFDSTUK VIII: ALGEMENE PERIODIEKE VERSCHIJNSELEN EN REEKSEN
VAN FOURIER

8.1.	Inleiding	204
8.2.	Vermogensrelaties	208
8.3.	Wisselgrootheden en effectieve waarden	212
8.4.	De fourierreeks van een periodieke functie	213
8.4.1.	Het benaderingscriterium	213
8.4.2.	De fouriercoëfficiënten	215
8.4.3.	Integraal over een periode	218
8.5.	Symmetrie-relaties	218
8.5.1.	Evenfuncties (spiegelbeeld-symmetrie)	219
8.5.2.	Onevenfuncties (radiaalsymmetrie)	220
8.5.3.	Verschuivingssymmetrie	221
8.6.	Voorbeelden	223
8.6.1.		223
8.6.2.		224
8.6.3.		224
8.7.	Convergentie van fourierreeksen	226
8.7.1.	De functieklasse	226
8.7.2.	Sommatie van een fourierreeks	228
8.8.	Differentiëren en integreren van fourierreeksen	231
8.9.	Het verschijnsel van Gibbs	233

VII

INHOUD

HOOFDSTUK IX : LINEAIRE, ACTIEVE EN NIET-RECIPROKE NETWERKEN	blz
9.1. Inleiding	238
9.2. Transactoren	240
9.2.1. De spannings-stroom-transactor	241
9.2.2. De spannings-spannings-transactor	241
9.2.3.	242
9.2.4. De stroom-stroom-transactor	243
9.3. Enkele opmerkingen	243
9.3.1.	243
9.3.2.	243
9.3.3.	243
9.3.4.	243
9.3.5.	244
9.3.6.	244
9.3.7.	246
9.3.8.	247
9.4. Voorbeelden van schakelingen met bestuurd bronnen	247
9.4.1.	247
9.4.2.	248
9.4.3.	249
9.4.4.	249
9.4.5.	251
9.4.6.	252
9.5. Enkele bijzondere schakelingen	253
9.5.1.	253
9.5.2. De negatieve immittantie-converter (N.I.C.)	253
9.5.3. De negatieve immittantie-inverter (N.I.I.)	255
9.6. De gyrator	256
9.6.1.	256
9.6.2.	257
9.6.3.	257
9.6.4. De gyrator is passief	257

		blz
9.6.5.	De gyrator is niet-reciprook	258
9.6.6.		258
9.7.	Lineaire netwerken	259
9.7.1.	Reciproke netwerken	259
9.7.2.	Niet-reciproke netwerken	259
9.7.3.	Bestuurde actieve elementen	260

HOOFDSTUK X : VRIJE TRILLINGEN EN KOMPLEXE FREQUENTIES

		blz
10.1.	Inleiding	262
10.2.		265
10.3.		266
10.4.	Uitbreiding van het frequentie-begrip	267
10.5.	Uitbreiding van het begrip impedantie	269
10.6.	Impedantie, admittantie en vrije trillingen	272
10.6.1.		272
10.6.2.		273
10.6.3.		273
10.6.4.		274
10.7.	Vrije trillingen in een tweede orde systeem	278
10.7.1.		278
10.7.2.	Het geval $D > 0$; het aperiodisch geval	279
10.7.3.	Het geval dat $D = 0$; het kritisch gedempte geval	281
10.7.4.	Het geval dat $D < 0$; het periodisch geval	281
10.8.		284
10.8.1.		284
10.8.2.		286
10.8.3.		288
10.8.4.		289
10.8.5.		290
10.8.6.	Voorbeeld (polen en nulpunten diagram)	293
10.8.7.	Betekenis van verschillende netwerkfuncties	295
10.8.8.	Komplexe resonantie	299

I. INLEIDING

I.1. Stroom en spanning

In elektrische netwerken hebben wij met twee fundamentele elektrische verschijnselen te maken, die wij stroom en spanning noemen.

Elektrische stroom kunnen wij vergelijken met het stromen van een vloeistof in een pijp. Volgens deze analogie komt elk vloeistofmolekuul met een elektrisch geladen deeltje overeen. Wanneer de deeltjes in geordende beweging komen, spreekt men van een stroom. Wij zijn niet geïnteresseerd in de beweging van elk deeltje afzonderlijk maar slechts in de gemiddelde beweging van alle deeltjes, met name, hoeveel elektrische deeltjes (of molekulen) er per sekonde een doorsnede van het elektrisch medium (of de pijp) passeren. Wij definiëren de stroomsterkte als een grootte die evenredig is aan het aantal deeltjes dat per sekonde door een denkbeeldig oppervlak - in feite meestal de doorsnede van een draad - vloeit. De keuze van de evenredigheidskonstante bepaalt de eenheid waarin de stroomsterkte wordt uitgedrukt. In principe kunnen wij de stroomsterkte meten door het aantal passerende deeltjes per sekonde te tellen. In het geval van een vloeistofstroom is het echter gemakkelijker de hoeveelheid vloeistof te bepalen door de massa, die per sekonde door het denkbeeldig oppervlak passeert (b.v. de opening van de pijp), te meten.

Bij het meten van de elektrische stroomsterkte is het eveneens gemakkelijker de stroom als geheel waar te nemen, b.v. met behulp van de magnetische, chemische, of calorische effecten die met elektrische stromen gepaard gaan. In de omgeving van een draad waardoor elektrische stroom vloeit, ondervindt een magneetje een koppel, dat evenredig is aan de stroomsterkte. Het magneetje kan in evenwicht worden gehouden door op het magneetje een tegenovergesteld koppel, welk door een veer geleverd wordt, uit te oefenen. Op dit beginsel berusten vele stroommeters of ampèremeters. Wanneer er geen risico van verwarring tussen het verschijnsel stroom en de grootte stroomsterkte bestaat zullen wij in het vervolg hetzelfde woord stroom gebruiken voor beide begrippen.

Elektrische potentiaal komt overeen met de vloeistofdruk.

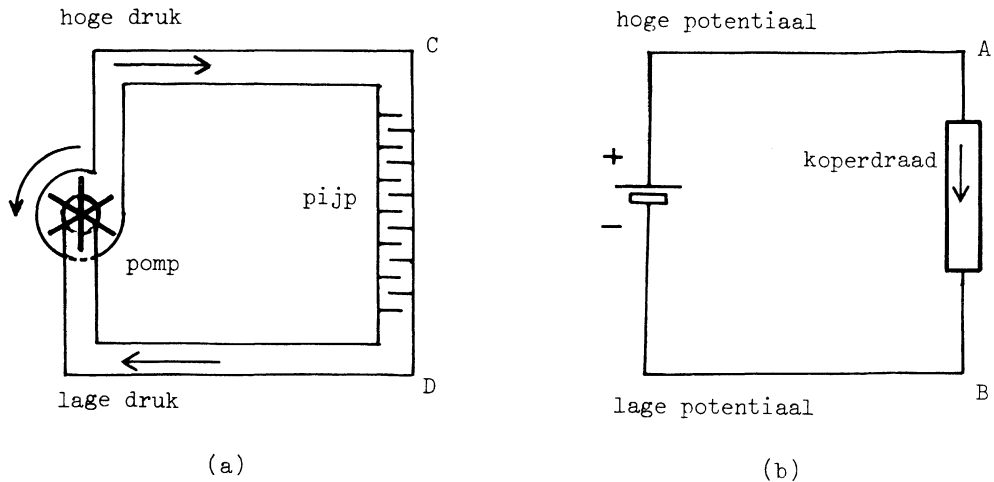


Fig. 1

Een vrij stromende vloeistof in een pijp vloeit van punten van hoge druk naar punten van lager druk en verliest daarbij potentiële energie. (Op dezelfde wijze verliest een deeltje potentiële energie wanneer het, onder de invloed van de zwaartekracht, van een hoger- naar een lager- liggend punt valt.) Het drukverschil tussen twee punten in de vloeistof komt overeen met het potentiaalverschil of de elektrische spanning tussen twee punten in een elektrisch netwerk.

De analogie wordt geïllustreerd in fig. 1. Door middel van een pomp wordt de druk van de vloeistof in punt C hoger dan in punt D. De vloeistof stroomt van C naar D door een buis waarin kribben zijn aangebracht. Hierdoor ondervindt de stroming een weerstand die slechts kan worden overwonnen door het bestaan van een drukverschil tussen C en D. Evenzo zorgt een "elektrische pomp" (b.v. een accu of dynamo) voor een potentiaalverschil tussen A en B dat nodig is om de weerstand tegen de beweging van de elektrische deeltjes te overwinnen.

In de pomp (accu) vloeit de vloeistof (stroom) van punten van lage naar punten van hoge druk (potentiaal). Dit is echter geen vrije stroming maar een gedwongen stroming die opgelegd wordt door middel van fysische verschijnselen buiten de vloeistof (elektrisch systeem), nl. de mechanische beweging van de pomp en de chemische werking van de accu.

Evenals in het geval van stroom, maken wij een onderscheid tussen de verschijnselen potentiaal en spanning enerzijds en de grootheden potentiaal- en spanning(sterkte) anderzijds. Wij kunnen b.v. de spanning(sterkte) tussen twee geladen en evenwijdig geplaatste platen bepalen door de aantrekkingskracht van de ene plaat op de andere te meten. Bij een geschikt gekozen geometrie is de aantrekkingskracht evenredig aan de spanning tussen de platen. De evenredigheidsconstante bepaalt de eenheid waarin de spanning(sterkte) wordt uitgedrukt. Op dit beginsel berusten sommige spanningsmeters of voltmeters, namelijk de z.g. elektrostatische voltmeters. In het vervolg zullen wij hetzelfde woord spanning (potentiaal) gebruiken zowel voor het verschijnsel als voor de grootte.

I.2. Energie en vermogen

Als er bijvoorbeeld in de pijp bij punt C een breuk plotseling ontstaat, dan stroomt de vloeistof van een punt van hoge druk (C) naar punten van lage druk (de vrije ruimte buiten de pijp). Hierdoor kan de vloeistof in snelle beweging komen, zodat de kinetische energie toeneemt. Dit gaat echter gepaard met een verlies van potentiële energie ten gevolge van de verlaging van de druk van de vloeistof bij het naar buiten stromen.

In een elektrisch systeem kan iets dergelijks ook gebeuren. Als de elektrische deeltjes buiten de draad treden - bijvoorbeeld ten gevolge van een groot potentiaalverschil tussen de draad en de omgeving, of door middel van thermionische emissie - dan neemt de kinetische energie van de deeltjes toe, wat echter gepaard gaat met een afnemende van de potentiële energie. Wanneer een kleine hoeveelheid elektrische lading Δq zich verplaatst van punt A naar punt B, bedraagt de verandering van de potentiële energie of de verrichte arbeid $(V_A - V_B)\Delta q$, waarin

V_A en V_B de potentialen van de punten A en B voorstellen. In het algemeen is de potentiaal in een punt o.a. een functie van de netto lading q die in dat punt is opgehoopt; eveneens is de druk in een bepaald punt in een vloeistof o.a. een functie van de dichtheid van de vloeistof in dat punt. Derhalve, wanneer een hoeveelheid lading $q_2 - q_1$ van A naar B wordt verplaatst, is de verrichte arbeid W gelijk aan

$$\int_{q_1}^{q_2} [V_A(q) - V_B(q)] dq.$$

[Voor meer informatie over deze begrippen wordt verwezen naar de colleges "elektriciteit" en "mechanica".]

Duiden wij de spanning tussen A en B met U aan*, dan is de verrichte arbeid gelijk aan

$$\int_{q_1}^{q_2} U(q) dq.$$

Het veranderen van energie of het verrichten van arbeid kan zowel langzaam als snel geschieden en wij kunnen hiermede rekening houden door het begrip vermogen in te voeren.

Vermogen wordt gedefinieerd als de hoeveelheid verrichte arbeid per tijdseenheid, dus

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} U \frac{\Delta q}{\Delta t} = U \frac{dq}{dt} = U I,$$

waarin I de stroom en P het vermogen voorstellen. Hierbij moet steeds worden gedacht aan twee punten A en B, waartussen een spanning bestaat, en een stroom die in punt A wordt toegevoerd en in punt B wordt afgevoerd.

* Soms wordt het symbool V ook voor spanning gebruikt. Volgens de internationale afspraken verdient het echter de voorkeur spanning met het symbool U aan te duiden.

I.3. Eenheden

Spanning wordt gemeten in volt, lading in coulomb, stroom in ampère of coulomb per seconde, energie in joule of watt seconde, en vermogen in watt.

Behalve de hoofdeenheden, volt, coulomb enz. worden ook secundaire eenheden gebruikt, aangegeven door de volgende voorvoegsels

deci	= 10^{-1}	x hoofdeenheid	d
centi	= 10^{-2}	"	c
milli	= 10^{-3}	"	m
micro	= 10^{-6}	"	μ
nano	= 10^{-9}	"	n
pico	= 10^{-12}	"	p
femto	= 10^{-15}	"	f
atto	= 10^{-18}	"	a
deca	= 10	x hoofdeenheid	da
hecto	= 10^2	"	h
kilo	= 10^3	"	k
mega	= 10^6	"	M
giga	= 10^9	"	G
tera	= 10^{12}	"	T

B.v.	1 megawatt	(MW)	= 10^6	watt	(W)
	1 kiloampère	(kA)	= 10^3	ampère	(A)
	1 picocoulomb	(pC)	= 10^{-12}	coulomb	(C)
	1 nanovolt	(nV)	= 10^{-9}	volt	(V)
	1 gigajoule	(GJ)	= 10^9	joule	(J)

Men lette op dat de naam van een hoofdeenheid voluit wordt geschreven met kleine letter - ook wanneer de naam overeenkomt met een eigenaam. Als afkorting wordt een hoofdletter zonder punt gebruikt. Bij de afkortingen van de voorvoegsels worden kleine letters gebruikt, behalve in de gevallen mega, giga en tera. In een deel van de literatuur wordt er ten onrechte afgeweken van deze internationaal gemaakte afspraken.

I.4. Richting en polariteit

Zoals uit de elektriciteitsleer bekend is, bestaan er twee soorten ladingen die wij positief en negatief noemen. Volgens internationale afspraak wordt de lading van elektronen negatief gerekend. Verder is overeengekomen dat, wanneer positieve lading zich verplaatst van A naar B, wij zullen zeggen dat een stroom van A naar B vloeit. Aangezien de verplaatsing van positieve lading van A naar B met dezelfde magnetische effecten gepaard gaat als de verplaatsing van negatieve lading van B naar A, wordt deze ook als een stroom van A naar B gerekend. Op deze wijze wordt er een richting aan het verschijnsel stroom toegekend.

Aan het verschijnsel spanning kennen wij geen richting maar een polariteit toe. De spanning U tussen A en B is gelijk aan $|V_A - V_B|$, waarin V_A en V_B de potentialen van de punten A en B zijn. Is het bekend dat $V_A > V_B$, dan is aan de spanning een polariteit toegekend, namelijk punt A heeft een hogere potentiaal dan punt B. Dit houdt in dat een positieve lading potentiële energie zou verliezen wanneer zij zich verplaatst van A naar B.

I.5. Tekenafpraak

Teneinde met de grootheden stromen en spanningen algebraïsch te kunnen rekenen is het noodzakelijk dat de symbolen U en I zowel positieve als negatieve waarden kunnen voorstellen.

I.5.1.

Wij spreken af dat in elke geleider één richting als positief wordt gerekend. Dus in fig.2 is de positieve richting van links naar rechts en wordt als zodanig door de pijl aangegeven.

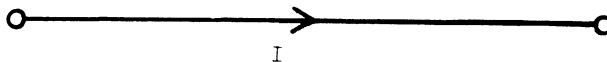


Fig. 2

Dit betekent dat wanneer de stroom in de richting van de pijl vloeit I positief wordt gerekend en in het tegenovergestelde geval I negatief wordt gerekend.

Een stroommeter bezit twee aansluitklemmen waarvan een met + en de andere met - aangeduid wordt.

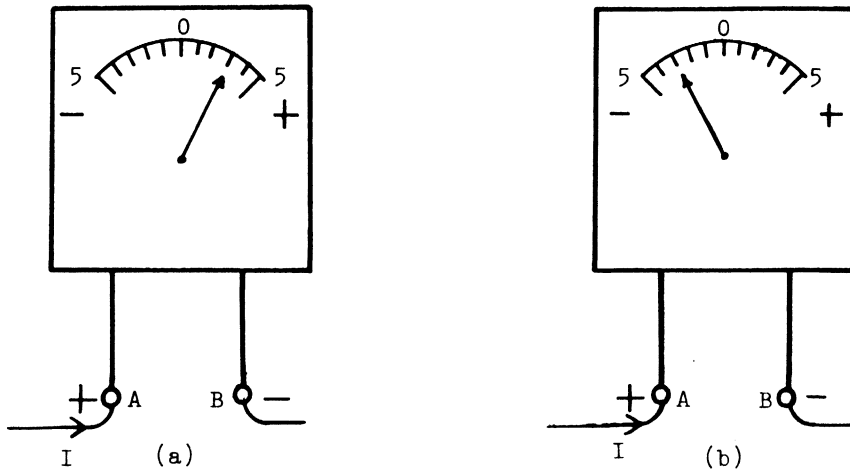


Fig. 3 ampèremeter

In figuur 3 bedraagt de stroom 3 ampère.

In geval a vloeit een stroom van de plusklem naar de minklem; in b vloeit een stroom van de minklem naar de plusklem. De stroom I van A naar B wordt positief gerekend in geval a en negatief in geval b.

I.5.2.

Op overeenkomstige wijze kunnen wij een algebraïsch teken aan de spanning toekennen. Voor elke twee punten waartussen een spanning kan bestaan spreken wij een positieve polariteit af (fig. 4a).



Fig. 4

De + en - tekens impliceren dat, wanneer de potentiaal van punt A hoger is dan de potentiaal van punt B, U positief gerekend wordt en negatief in het tegenovergestelde geval. Met andere woorden, wanneer een positieve lading zich verplaatst van A naar B, verliest zij potentiële energie indien U positief is en wint zij potentiële energie in het tegenovergestelde geval. In het eerste geval zeggen wij dat arbeid door de stroom wordt verricht (de lading verliest potentiële energie); in het tweede geval dat arbeid aan de stroom wordt verricht (de lading wint potentiële energie). Wanneer er risico van verwarring kan bestaan op welke twee punten een gegeven spanning betrekking heeft, dan wordt een dubbele pijl gebruikt met het spanningssymbool ernaast geplaatst (fig. 4b).

Een voltmeter bezit twee aansluitklemmen waarvan een met + en de andere met - wordt aangeduid.

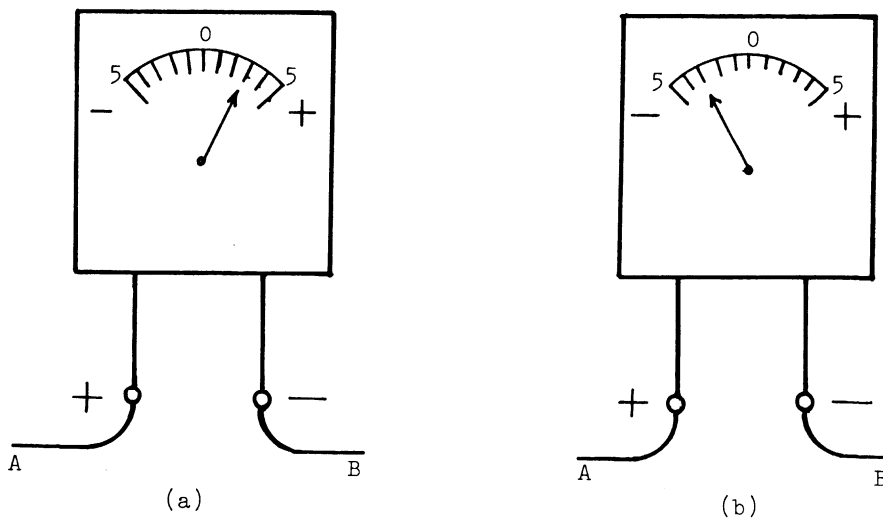


Fig. 5 voltmeter

In fig. 5 bedraagt de spanning 3 volt.

In fig. 5a is de potentiaal van A hoger dan die van B.

In fig. 5b is de potentiaal van B hoger dan die van A.

De spanning U van A t.o.v. B is +3 volt in fig. 5a en -3 volt in fig. 5b.

I.5.3.

Wij kunnen de positieve richting en de positieve polariteit vrij kiezen. Bijvoorbeeld in fig. 4, bij de aangegeven positieve polariteit kan de positieve stroomrichting evengoed van A naar B als van B naar A zijn. In het eerste geval is $U I > 0$ wanneer arbeid door de stroom verricht wordt; in het tweede geval is $U I < 0$ wanneer arbeid aan de stroom wordt verricht.

Wij zullen vaak de (algebraïsche) spanning tussen A en B aanduiden met U_{AB} . Dit betekent dat de positieve polariteit wordt aangegeven door een plusteken bij punt A en een minteken bij punt B te plaatsen.

$U_{AB} = V_A - V_B = -U_{BA}$, waarin V_A en V_B de potentialen van respectievelijk A en B zijn. Op dezelfde wijze zullen wij soms de algebraïsche stroom tussen A en B met I_{AB} aanduiden. Dit betekent dat de positieve richting van A naar B is, zodat $I_{AB} = -I_{BA}$. Met deze notatie wordt uitdrukkelijk de tekenafspraken voor de spanning en stroom naar voren gebracht.

I.6. Weerstand

Het is een bijzondere eigenschap van metalen, dat wanneer een stroom door een metalen draad vloeit, de stroomsterkte evenredig is aan het potentiaalverschil tussen twee punten op de draad.

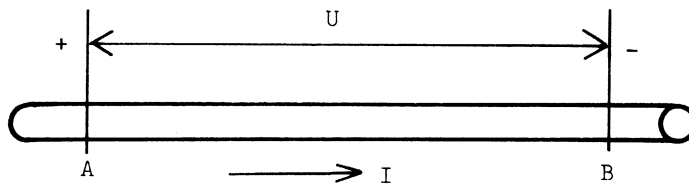


Fig. 6 geleidende draad

Wij kunnen schrijven $U = R I$ of $I = G U$.

R en G zijn constante coëfficiënten die respectievelijk weerstand en geleiding heten en die respectievelijk in ohm (Ω) en siemens (S) worden uitgedrukt.

Het is evident dat $R G = 1$. Andere stoffen dan metalen voldoen, zij het wat minder goed, ook aan deze evenredigheidsrelatie, die als de wet van Ohm^{*1} wordt aangeduid.

Een apparaat, voorzien van twee aansluitklemmen, dat stroom geleidt volgens de wet van Ohm, noemen wij een ideale weerstand (fig. 7), of kortweg (in dit college), weerstand.

Hetzelfde woord weerstand wordt gebruikt voor drie verschillende begrippen, namelijk het verschijnsel dat de beweging van elektrische deeltjes afgeremd wordt door botsingen met atomen in de materie - waardoor de stroom een weerstand ondervindt; de grootte R , en het apparaat.

In de engelse taal wordt het woord resistance voor de twee eerste begrippen gebruikt en het woord resistor voor het apparaat. Dergelijke beschouwingen gelden ook voor "geleiding", "conductance" en "conductor".

Wanneer de positieve stroomrichting en spanningspolariteit worden gekozen zoals in fig. 6 is aangegeven, dan geldt $R > 0$ en dus ook $G > 0$. Dit is een natuurwet. Dan is het aan de weerstand toegevoerde vermogen $P = U I = R I^2 = G U^2 \geq 0$.^{*2}



Fig. 7

I.7. Bronnen

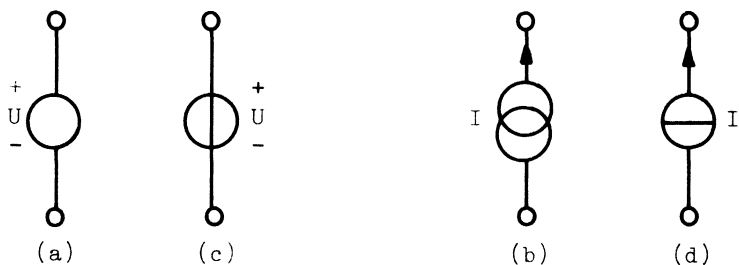
Elektrische stromen en spanningen kunnen niet spontaan in een netwerk van weerstanden ontstaan zonder de invloed van een uitwendig middel.

*1 G.S. Ohm 1827

*2 Het laatste gelijkteken geldt slechts als $I=0$, $U=0$.

Wij hebben reeds in par.1.6 gezien dat het bestaan van stromen tot gevolg heeft dat in de weerstanden arbeid verricht wordt.

Dit betekent dat energie aan het uitwendig middel onttrokken en in een andere vorm omgezet wordt - in dit geval omgezet in warmte. De energie moet ergens vandaan komen (wet van behoud van energie) zodat wij in de opbouw van de theorie behoefte aan het begrip energiebron hebben. In de netwerktheorie kennen wij twee soorten ideale bronnen die wel door bepaalde fysische apparaten goed benaderd kunnen worden.



Symbolen voor de
spanningsbron

Symbolen voor de
stroombron

Fig. 8

I.7.1. De ideale spanningsbron^{*}) (fig. 8 a en c)

De ideale spanningsbron is een element, voorzien van twee klemmen waartussen een spanning bestaat, onafhankelijk van de geleverde stroom. Een op de juiste manier geladen en in goede toestand verkerende accu is een goede benadering van een ideale spanningsbron, mits niet te veel stroom afgenomen wordt. De ideale spanningsbron is van grote theoretische betekenis en niet uitsluitend beperkt tot de beschrijving van dit apparaat.

Een dergelijke bron mag men nooit kortsluiten. D.w.z. men mag de klemmen nooit verbinden met een draad waarvan de weerstand nul is. Anders heeft men een tegenstrijdigheid: de spanning tussen de klemmen is gelijk aan de bronsterkte (niet nul) en tegelijk nul wegens de kortsluitdraad.

^{*})Beide symbolen zijn in algemeen gebruik. In internationale kringen is er een lichte voorkeur voor symbool c.

I.7.2. De ideale stroombron* (fig. 8 b en d)

De ideale stroombron is een element, voorzien van twee klemmen waartussen een stroom vloeit onafhankelijk van de spanning tussen de klemmen. Het is dus duidelijk dat er een uitwendig geleidende weg moet bestaan; anders zou een tegenstrijdigheid ontstaan. Derhalve hebben wij de regel: een ideale stroombron mag nooit "open" gelaten worden.

De stroombron wordt in de praktijk goed benaderd door de zogenaamde generator van Van der Graaff. In dit apparaat wordt lading op een lopende band naar een bol getransporteerd. De bewegende lading is niets anders dan een stroom, waarvan de sterkte onafhankelijk is van de spanning tussen de bol en de ladingsgenerator.

Het begrip ideale stroombron is van grote theoretische betekenis en niet uitsluitend beperkt tot de beschrijving van dit apparaat.

In de netwerktheorie beschouwen wij de spannings- en stroombronnen als bronnen van elektrische energie, hoewel de fysische apparaten die hiermede corresponderen feitelijk energieomzetters zijn. Zij zijn van even grote theoretische betekenis, zoals in de volgende paragrafen zal blijken. De accu zet chemische energie en de generator van Van der Graaff zet mechanische energie in elektrische energie om.

De energieomzetting kan even goed in de omgekeerde richting geschieden, d.w.z. elektrische energie wordt in chemische of mechanische energie omgezet. Dit gebeurt bij het opladen van een accu of bij het omkeren van de bewegingsrichting van de lopende band van de generator van Van der Graaff. In dergelijke gevallen beschouwen wij de spannings- en stroombronnen als energie"putten".

I.7.3.

Stilzwijgend wordt in het voorgaande verondersteld dat de bronsterkte niet nul is. Mocht dit toch het geval zijn, dan is een spanningsbron niets anders dan een kortsluiting; bij het kortsluiten van een kortsluiting treedt er geen tegenstrijdigheid op. Een stroombron van sterkte nul is in feite een open circuit. In het algemeen kunnen wij zeggen dat twee spanningsbronnen van ongelijke sterkten niet

*) In internationale kringen is er een lichte voorkeur voor symbool d.

parallel verbonden mogen worden. Evenzo geldt dat twee stroombronnen van ongelijke sterkten niet in serie verbonden mogen worden.

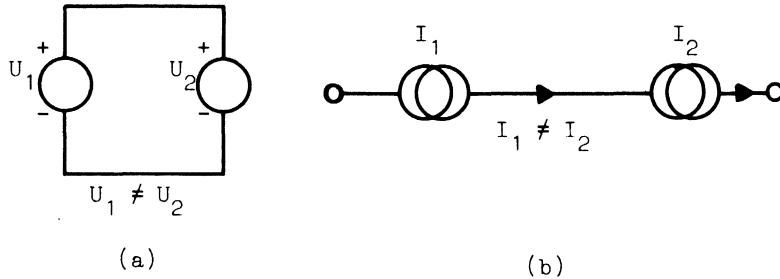
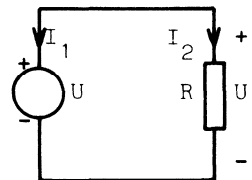


Fig. 9

In fig. 9 zijn aangegeven twee verboden verbindingen: a is in strijd met de spanningswet en b is in strijd met de stroomwet van Kirchhoff (zie par.I.8).

Wij hebben al gezien dat, wanneer de positieve stroomrichting en de positieve spanningspolariteit volgens fig. 6 worden gekozen en wanneer $U I > 0$, arbeid door de stroom verricht wordt.

Verbinden wij een spanningsbron aan een weerstand, dan vloeit een stroom binnen de bron van de klem van lage potentiaal naar de klem van hoge potentiaal en in de weerstand van de klem van hoge potentiaal naar de klem van lage potentiaal. Als U en I_1 de bronspanning en stroom zijn, met positieve polariteit en positieve richting gekozen volgens fig. 6, dan is $U I_1 < 0$, in overeenstemming met het feit dat arbeid aan de stroom wordt verricht door mechanisch, chemisch of ander middel. Voor de weerstand, met stroom I_2 , geldt volgens dezelfde afspraak dat $U I_2 > 0$, zodat in dit geval arbeid door de stroom wordt verricht. Aangezien de sterkte van de stroom in de bron gelijk is aan die van de weerstand, is $I_1 = -I_2$. Hieruit volgt dat het vermogen dat in de weerstand wordt gedissipeerd gelijk is aan het vermogen dat door de bron geleverd wordt. Dit is een andere interpretatie van het negatieve teken van de grootte $U I_1$: negatief opgenomen of gedissipeerd vermogen wil zeggen positief afgegeven of geleverd vermogen.



Vervangen wij de spanningsbron door een stroombron in het voorgaande, dan ontstaat een spanning over de weerstand zodat één van de klemmen van de bron een hogere potentiaal dan de andere heeft. De verdere argumentatie blijft dan geldig.

I.8. Netwerken en de wetten van Kirchhoff (1845 en 1847)*

Een samenstel van apparaten, zoals de ideale weerstanden en bronnen, waarvan de klemmen onderling door geleidende draden verbonden zijn, noemen wij een elektrisch netwerk. Deze draden komen samen in knooppunten (fig. 10). In dit verband worden de apparaten als takken van het netwerk aangeduid.

Het netwerkprobleem is het berekenen van alle stromen en spanningen in het netwerk wanneer de bronsterkten bekend zijn. Het blijkt dat het netwerkprobleem opgelost kan worden m.b.v. twee wetten die door Kirchhoff ingevoerd zijn.

I.8.1.

Uit de elektriciteitsleer is de wet van behoud van lading bekend, namelijk lading kan noch gecreëerd noch vernietigd worden. Wel bestaat lading uit twee soorten, namelijk positieve en negatieve, en de behoudswet moet in algebraïsche zin worden geïnterpreteerd.

In het schema van fig. 10, waarin een typerend knooppunt A te verwaarlozen afmetingen heeft, kan er geen opéénhoping van lading in A plaatsvinden. Dit heeft tot gevolg dat, voor de aangegeven stromen,

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

In het algemeen geldt

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 ,$$

waarin n het aantal geleiders is, dat in één knooppunt samenkomt.

* Deze wetten gelden niet voor alle elektrische systemen. De uitzonderingen zullen echter niet in dit college behandeld worden en behoren eigenlijk niet tot de klasse systemen die elektrische netwerken heten.

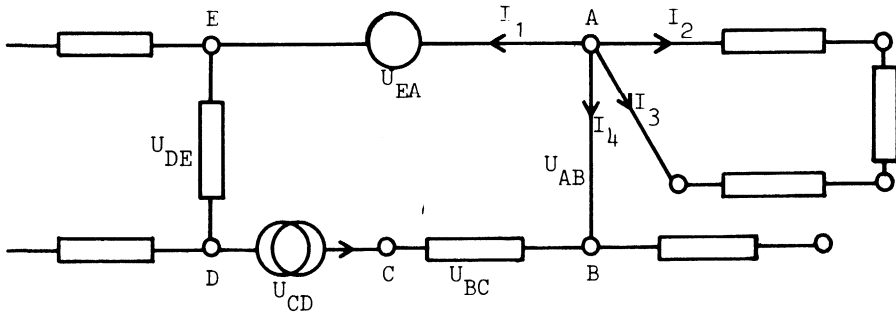


Fig. 10 een deel van een elektrisch netwerk met een te beschouwen knooppunt A en een gesloten weg ABCDEA

Deze vergelijking is de stroomwet van Kirchhoff, namelijk, de algebraïsche som van de stromen in alle draden, die in een gemeenschappelijk knooppunt samenkomen, is gelijk aan nul. Afvloeiende stromen worden positief gerekend, toevloeiende stromen negatief. Met andere woorden, de som van de toevloeiende stromen is gelijk aan de som van de afvloeiende stromen.*

I.8.2.

Voorts geldt ook de spanningswet van Kirchhoff.

In de gesloten weg A B C D E (fig. 10) is

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = 0.$$

* Men mag ook afvloeiende stromen als negatief, en toevloeiende als positief rekenen. De eerstgenoemde afspraak is echter de meest gebruikelijke.

In het algemeen geldt

$$\sum_{l=1}^m U_l = 0 ,$$

waarin m het aantal takken in de gesloten weg is.

Bij het doorlopen van een zich in het netwerk bevindende gesloten weg is de algebraïsche som van de spanningen tussen opeenvolgende knooppunten gelijk aan nul.

De spanning wordt positief gerekend, wanneer de tak doorlopen wordt in dezelfde richting waarin zich een positieve lading onder invloed van de spanning zou bewegen en negatief in het tegenovergestelde geval.

De spanningswet van Kirchhoff volgt direct uit het in de elektriciteitsleer bekende begrip potentiaal. In de netwerktheorie kunnen wij meestal volstaan met het potentiaalverschil tussen de verschillende knooppunten van het netwerk en één bepaald knooppunt O , dat wel willekeurig gekozen mag worden. Bij een gegeven configuratie en toestand is dit potentiaalverschil ondubbelzinnig bepaald en wel zodanig dat de arbeid, die aan een positieve eenheidslading die zich verplaatst van A naar B verricht wordt, gelijk is aan $U_{AB} = U_{AO} - U_{BO}$, waarin U_{AB} het potentiaalverschil tussen A en B , U_{AO} , U_{BO} de potentiaalverschillen tussen A en O , respectievelijk B en O zijn.

In een gesloten weg van opeenvolgende knooppunten $1, 2, 3, \dots, n$ en bij een referentieknooppunt O , is

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} + \dots + U_{n1} = U_{10} - U_{20} + U_{20} - U_{30} + \dots + U_{n0} - U_{10} = 0.$$

Dit houdt in dat b.v. $U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{45} = U_{10} - U_{50} = U_{15}$.

Fig. 11 illustreert de twee wetten van Kirchhoff.

De stroomwet, toegepast op het knooppunt A , levert $-4 + 3 - 2 + 1 - (-2) = 0$ en de spanningswet toegepast op de gesloten weg $A B C D E$ levert $+3 - 4 - (-2) + 1 - 2 = 0$.

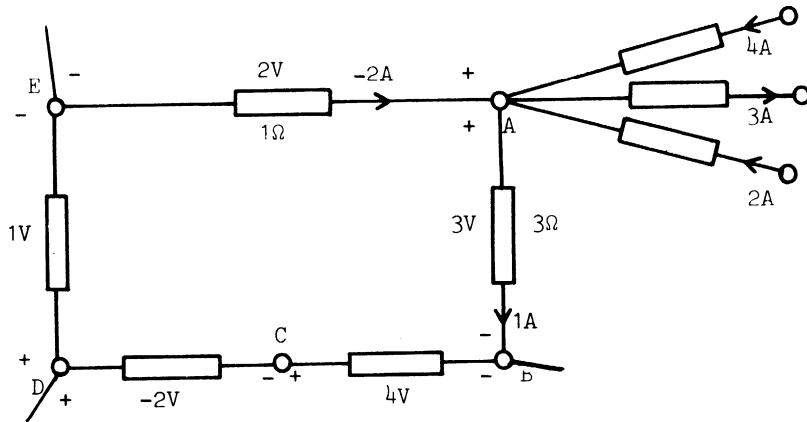


Fig. 11 illustreert de twee wetten van Kirchhoff

I.9. Serie-en parallelschakelingen

I.9.1. Serie-schakeling

Stel dat een keten van een aantal opeenvolgend geschakelde weerstanden deel uitmaakt van een netwerk.

In deze keten komen in ieder van de opeenvolgende knooppunten 2, ...n slechts twee weerstanden samen (fig. 12). Wij noemen zo'n keten een serie-schakeling.

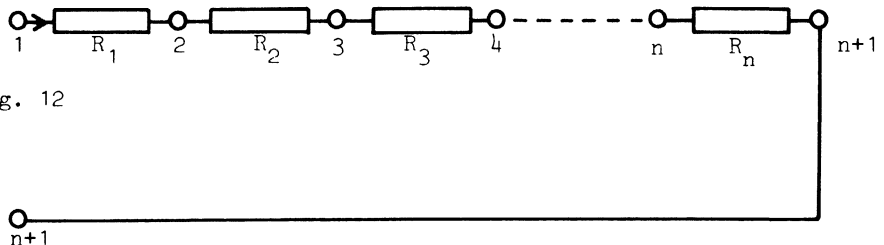


Fig. 12

Tengevolge van de spanningswet van Kirchhoff is

$$U_{1,n+1} = U_{12} + U_{23} + \dots + U_{n,n+1}$$

Volgens de stroomwet van Kirchhoff, toegepast op de knooppunten 1, 2, 3,, zijn alle stromen in de weerstanden gelijk aan I.

Uit de wet van Ohm volgt

$$U_{12} = R_1 I, U_{23} = R_2 I, \dots, \text{zodat}$$

$$U_{1,n+1} = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I.$$

Als wij de knooppunten 1 en n als klemmen beschouwen, dan zijn de spanning $U_{1,n+1}$ tussen deze klemmen en de toevloeiende stroom I niet te onderscheiden van de spanning en de stroom van een enkele weerstand met waarde $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$, d.w.z.

$$R = \sum_{k=1}^n R_k .$$

Wij spreken over de equivalentie van deze serieschakeling van weerstanden en de weerstand R, of wij noemen R de vervangingsweerstand van de keten. De vervangingsweerstand is gelijk aan de som van de weerstanden in de serie-keten.

Het is essentieel dat slechts 2 draden of takken uitmonden in de "inwendige" knooppunten 2, 3, ...n. Anders kunnen wij niet garanderen dat de stromen in alle weerstanden gelijk zijn.

I.9.2. Parallelschakeling

Wij beschouwen nu een parallelschakeling van weerstanden als onderdeel van een netwerk (fig. 13). Hierin is één klem van iedere weerstand verbonden aan een knooppunt van het netwerk, terwijl alle andere klemmen van de weerstanden aan een ander knooppunt van het netwerk zijn verbonden.

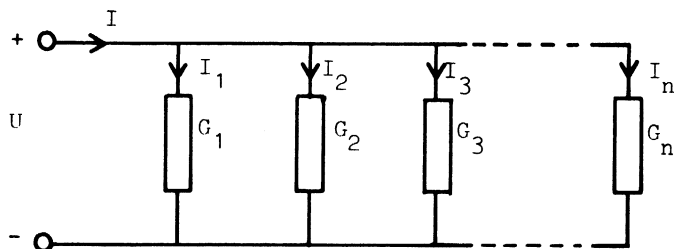


Fig. 13

Tengevolge van de stroomwet van Kirchhoff is

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

Volgens de spanningswet van Kirchhoff, toegepast op de gesloten wegen G_1G_2 , G_2G_3 enz., zijn alle spanningen over de weerstanden gelijk aan U .
 Uit de wet van Ohm volgt

$$I_1 = G_1U, I_2 = G_2U, \dots, \text{zodat}$$

$$I = (G_1 + G_2 + \dots + G_n)U.$$

De spanning U en stroom I zijn dus niet te onderscheiden van de spanning en stroom van een enkele geleiding met waarde

$$G = \sum_{k=1}^n G_k.$$

Wij spreken over de equivalentie van deze parallelschakeling van geleidingen en de geleiding G , of wij noemen G de vervangingsgeleiding van de keten. De vervangingsgeleiding is gelijk aan de som van de geleidingen van de parallelketen.

I.9.3.

De uitdrukking $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$ kan ook, hoewel minder elegant, worden geschreven als

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3 \dots R_n}{R_2 R_3 R_4 \dots R_n + R_1 R_3 R_4 \dots R_n + R_1 R_2 R_4 \dots R_n + \dots + R_1 R_2 R_3 \dots R_{n-1}}$$

Evenals bij de serieschakeling kunnen wij ook minder elegant schrijven:

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3 \dots G_n}{G_2 G_3 G_4 \dots G_n + G_1 G_3 G_4 \dots G_n + \dots + G_1 G_2 G_3 \dots G_{n-1}}$$

Deze voorbeelden tonen aan dat, wil men onnodig gecompliceerde formules vermijden, de grootheden geleiding en weerstand verstandig gehanteerd moeten worden. Echter, in het geval van een parallelschakeling van twee weerstanden hebben wij de nuttige formule

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} ;$$

eveneens geldt voor twee geleidingen in serie

$$G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} .$$

I.10. Laddernetwerk

Een toepassing van de voorafgaande begrippen vinden wij in de volgende opgave: Bereken de equivalente weerstand van het zogenaamde laddernetwerk van fig. 14.

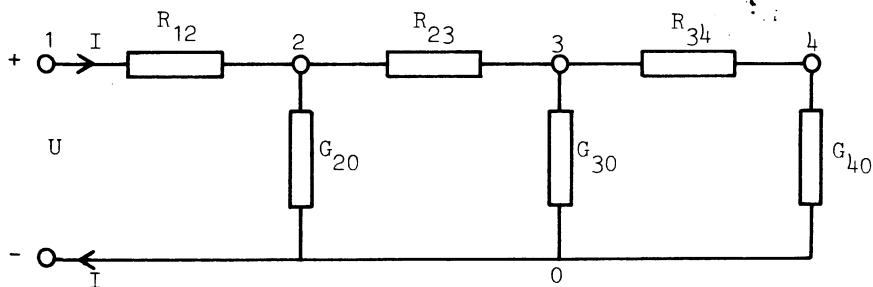


Fig. 14

Hier zien wij een weerstand R_{12} in serie met een deelnetwerk dat in knooppunt 2 aanvangt. Wij kunnen schrijven:

$U/I = R = R_{12} + \frac{1}{G_2}$, waarin G_2 de equivalente geleiding van het deelnetwerk is.

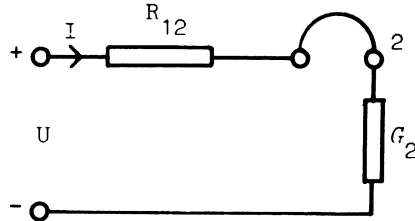


Fig. 15

Deze geleiding bestaat uit de parallelschakeling van G_{20} en een deelnetwerk met weerstand R'_2 .

$$\text{Dus } G_2 = G_{20} + \frac{1}{R'_2}$$

$$\text{en } R = R_{12} + \frac{1}{G_{20} + \frac{1}{R'_2}} .$$

De weerstand R'_2 bestaat uit een weerstand R_{23} in serie met een deelnetwerk met equivalente geleiding G_3 . Dus $R'_2 = R_{23} + \frac{1}{G_3}$.

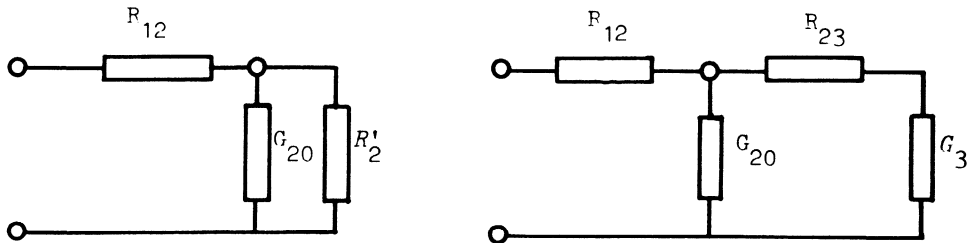


Fig. 16

$$\text{Dan is } R = R_{12} + \frac{1}{G_{20} + \frac{1}{R_{23} + \frac{1}{G_3}}}$$

Doorgaande met deze berekening vinden wij op dezelfde wijze

$$R = R_{12} + \frac{1}{G_{20} + \frac{1}{R_{23} + \frac{1}{G_{30} + \frac{1}{R_{34} + \frac{1}{G_{40}}}}}}$$

Deze uitdrukking is een zogenaamde kettingbreuk, die stap voor stap tot een gewone breuk teruggevoerd kan worden.

Dus

$$R = R_{12} + \frac{1}{G_{20} + \frac{1}{R_{23} + \frac{1}{G_{30} + \frac{G_{40}}{1 + R_{34} G_{40}}}}}$$

$$= R_{12} + \frac{1}{G_{20} + \frac{1}{R_{23} + \frac{1}{G_{30} (1 + R_{34} G_{40}) + G_{40}}}} \quad \text{enz.}$$

Bij een numeriek voorbeeld van dit type kan men beter de deelbreuken stap voor stap numeriek berekenen dan eerst alles algebraïsch herleiden en als laatste stap de numerieke waarden invullen.

Bijvoorbeeld als elke weerstand 1Ω bedraagt, is

$$\begin{aligned}
 R &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} \\
 &= 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \Omega.
 \end{aligned}$$

I.11. Spannings- en stroomdeling

Verdere voorbeelden van serie- en parallelschakelingen zijn de spannings- en stroomdelers (fig. 17).

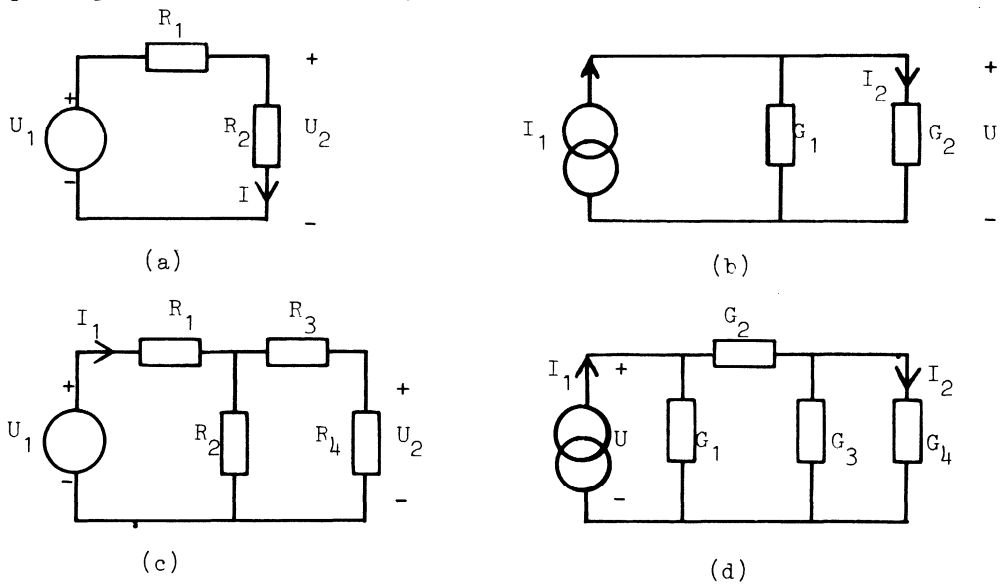


Fig. 17

I.11.1.

In fig. 17a zien wij een serieschakeling van weerstanden verbonden aan een spanningsbron. De totale weerstand is dus $R_1 + R_2$. De stroom die door de bron geleverd wordt is dan $I = \frac{U_1}{R_1 + R_2}$ en deze stroom vloeit door beide weerstanden.

De spanning over R_2 is dus gelijk aan

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2 U_1}{R_1 + R_2} .$$

D.w.z. dat U_2 verkregen wordt door U_1 door $\frac{R_1 + R_2}{R_2}$ te delen.

I.11.2.

In fig. 17b hebben wij een parallelschakeling verbonden aan een stroombron. De totale geleiding is $G_1 + G_2$ en de spanning die hierover ontstaat is gelijk aan

$$\frac{I_1}{G_1 + G_2} .$$

Derhalve is de stroom I_2 , die door G_2 vloeit, gelijk aan

$$\frac{G_2 I_1}{G_1 + G_2} .$$

D.w.z. dat I_2 verkregen wordt door I_1 door $\frac{G_1 + G_2}{G_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ te delen.

In fig. 17c en 17d hebben wij wat gecompliceerdere schakelingen, maar dezelfde rekenwijze kan ook hier toegepast worden.

I.11.3.

In fig. 17c bedraagt de totale weerstand

$$R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + R_4}} = R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} .$$

De totale stroom is dus

$$\frac{(R_2 + R_3 + R_4) U_1}{(R_3 + R_4) (R_1 + R_2) + R_1 R_2} = I_1 .$$

De combinatie van R_2 parallel aan $R_3 + R_4$ fungeert als stroomdeler.

Volgens de formule voor stroomdeling uitgedrukt in weerstanden, vloeit door

$$R_4 \text{ een stroom } \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} I_1 .$$

De spanning U_2 is dan

$$\frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} I_1 = \frac{R_2 R_4}{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4) + R_1 R_2} U_1 .$$

Op dezelfde wijze vinden wij voor fig. 17d dat de totale geleiding be- draagt

$$G_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{G_3 + G_4}} = G_1 + \frac{G_2 (G_3 + G_4)}{G_2 + G_3 + G_4} .$$

De spanning U_1 is dus

$$U_1 = \frac{(G_2 + G_3 + G_4)}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_1 G_2} I_1 .$$

De combinatie van G_2 in serie met $G_3 + G_4$ fungeert als spanningsdeler.

Volgens de formule voor spanningsdeling uitgedrukt in geleidingen, ont-

staat over G_4 een spanning

$$\frac{G_2}{G_2 + G_3 + G_4} U_1 .$$

De stroom I_2 is dan gelijk aan

$$\frac{G_2 G_4}{G_2 + G_3 + G_4} U_1 = \frac{G_2 G_4}{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4) + G_1 G_2} I_1 .$$

I.12. Maasmethode

Tot nu toe hebben wij uitsluitend met de zogenaamde serie-parallel-schakelingen gewerkt, waarvan de totale weerstand, de stroom, en de spanningsverhoudingen kunnen worden berekend door uitsluitend de combinatiewetten van weerstanden in serie of parallel toe te passen.

Bij een zogenaamde brugschakeling (fig. 18) lukt dit niet meer. Wij moeten dan terugvallen op de wetten van Kirchhoff. Wij kiezen de positieve stroomrichting en positieve spanningspolariteit van elke tak - behalve in de spanningsbrontak - volgens de afspraak van fig. 6. Op deze wijze kunnen wij de figuren eenvoudig houden door de dubbele pijlen bij de aanduiding van de takspanningen weg te laten.

Teneinde alle stromen en spanningen in het netwerk te bepalen, zullen wij de stroomwet voor de vier knooppunten en de spanningswet voor de verschillende gesloten wegen opschrijven.

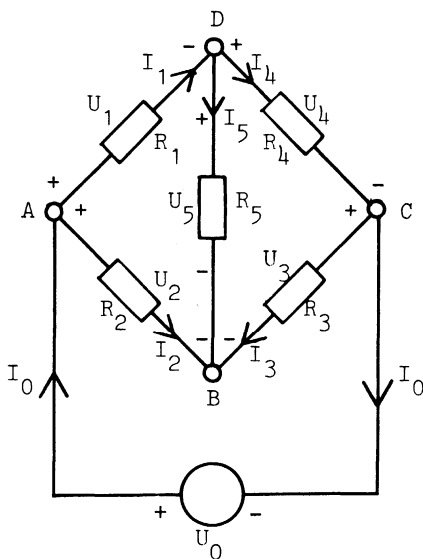


Fig. 18

De stroomwet levert:

$$\begin{array}{ll}
 + I_1 + I_2 - I_0 = 0 & \text{voor knooppunt A} \\
 - I_2 - I_5 - I_3 = 0 & \text{B} \\
 + I_3 - I_4 + I_0 = 0 & \text{C} \\
 - I_1 + I_5 + I_4 = 0. & \text{D}
 \end{array}$$

Deze vier vergelijkingen zijn niet onafhankelijk. Iedere vergelijking kan verkregen worden door de andere drie op te tellen en dan met -1 te vermenigvuldigen. Wij hebben slechts drie onafhankelijke vergelijkingen met zes onbekenden. Wij kunnen dus drie variabelen, of combinaties van variabelen, als onafhankelijke beschouwen. Als onafhankelijke variabelen kiezen wij I_0, I_1, I_4 .

$$\begin{aligned}
 \text{Dan is } I_2 &= I_0 - I_1 \\
 I_3 &= -I_0 + I_4 \\
 I_5 &= I_1 - I_4.
 \end{aligned}$$

Wij passen nu de spanningswet op de mazen^x U_0, R_2, R_3 ,
 R_1, R_5, R_2 ,
 en R_4, R_3, R_5 ,

alsmede de wet van Ohm op iedere weerstand toe.

Er volgt

$$\begin{aligned}
 0 &= -U_0 + R_2 I_2 - R_3 I_3 , \\
 0 &= R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_2 I_2 , \\
 0 &= R_4 I_4 + R_3 I_3 - R_5 I_5 .
 \end{aligned}$$

^x "Maas" wil hier zeggen: de omtrek van een opening. Een maas is een speciale gesloten weg. Vgl. de mazen van een visnet.

Nadat de afhankelijke variabelen I_2 , I_3 , I_5 geëlimineerd zijn verkrijgen wij

$$U_0 = (R_2 + R_3) I_0 - R_2 I_1 - R_3 I_4 \quad (1)$$

$$0 = -R_2 I_0 + (R_1 + R_2 + R_5) I_1 - R_5 I_4 \quad (2)$$

$$0 = -R_3 I_0 - R_5 I_1 + (R_3 + R_4 + R_5) I_4. \quad (3)$$

Voordat wij deze vergelijkingen oplossen willen wij eerst een paar interessante feiten opmerken. In de eerste plaats hadden wij meer vergelijkingen kunnen opschrijven, bijvoorbeeld voor de weg U_0 , R_1 , R_4 geldt

$$-U_0 + R_1 I_1 + R_4 I_4 = 0.$$

Deze vergelijking is echter niet onafhankelijk van de andere drie, maar kan worden verkregen door (1), (2), (3) op te tellen. Hetzelfde zou gelden voor alle andere wegen, aangezien wij slechts drie onafhankelijke onbekenden hebben en reeds drie vergelijkingen.

Het tweede punt is, dat de vergelijkingen (1), (2), (3) evengoed verkregen hadden kunnen worden wanneer wij uitgegaan waren van fictieve, zogenaamde maasstromen (fig. 19).

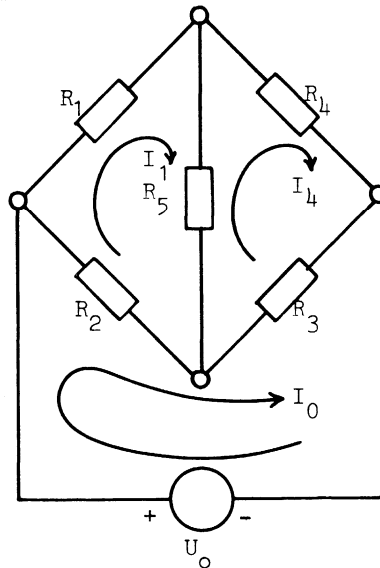


Fig. 19

De takken van het netwerk delen het vlak waarop het netwerk is getekend in een aantal door de takken begrensde gebieden. Langs de grenzen van deze gebieden - de mazen - denken wij ons rondgaande stromen, zoals is afgebeeld in fig. 19. De echte stroom in een gegeven tak is hetzij de maasstroom zelf, of het verschil tussen twee aangrenzende maasstromen. Bijvoorbeeld is $I_5 = I_1 - I_4$. Het minteken treedt op als wij afspreken dat de positieve richting van alle maasstromen steeds met dezelfde omlooprichting correspondeert (in fig. 19 met de klok mee).

Een maasvergelijking kan worden opgeschreven door de in de maas aanwezige spanningsbronsterkte gelijk te stellen aan de som van alle weerstanden in de maas, vermenigvuldigd met de eigen maasstroom en verminderd met de som van de produkten van de aangrenzende maasstromen en de corresponderende weerstanden die tot de desbetreffende en de aangrenzende mazen behoren.

Volgens deze procedure kunnen wij de vergelijkingen (1), (2), (3) direct opschrijven. Men moet daarbij goed op de polariteit van de bronnen letten. In vergelijking (1) heeft U_0 een plusteken omdat I_0 positief is wanneer de maasstroom van de plus- naar de min- klem buiten de bron vloeit (d.w.z. van de min- naar de plusklem binnen de bron); in het tegenovergestelde geval zou het teken min zijn.

Deze maasmethode is steeds bruikbaar wanneer het netwerk op een plat vlak getekend kan worden zonder kruisende takken. In dit college zullen wij uitsluitend met deze z.g. vlakke of planaire netwerken te maken hebben. Wij hebben hier niet bewezen dat deze methode algemeen geldig is, maar het wel aannemelijk gemaakt en, in het geval van de brug-schakeling van fig. 18, geverifieerd.

Wij komen nu op de oplossing van de vergelijkingen (1), (2), (3) terug. Dit kan door stapsgewijze eliminatie, óf met behulp van determinanten, óf volgens de matrixalgebra geschieden. Het resultaat is

$$I_0 = \frac{1}{\Delta} \left[(R_1 + R_2) (R_3 + R_4) + R_5 (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \right] U_0$$

$$I_1 = \frac{1}{\Delta} \left[R_2 (R_3 + R_4) + R_5 (R_2 + R_3) \right] U_0$$

$$I_4 = \frac{1}{\Delta} \left[R_3 (R_1 + R_2) + R_5 (R_2 + R_3) \right] U_0 ,$$

waarin $\Delta = R_1 R_4 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 (R_1 + R_4) + R_5 (R_2 + R_3) (R_1 + R_4)$.

I. 13. Knooppuntsmethode

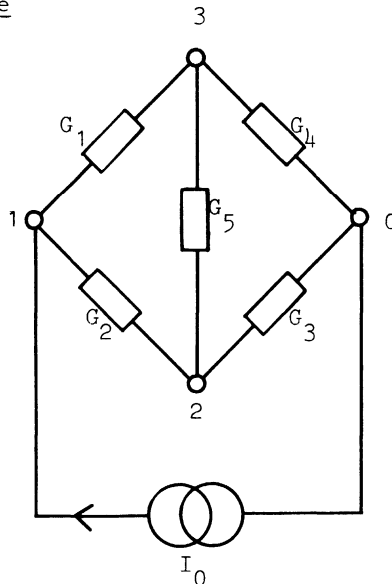


Fig. 20

In fig. 20 hebben wij dezelfde brugschakeling als in fig. 18, behalve dan dat daaraan een stroombron in plaats van een spanningsbron is verbonden. In plaats van een aantal stromen als onbekenden te nemen gaan wij nu van de onbekende spanningen uit. Eén knooppunt wordt als referentie gekozen en de potentiaalverschillen - dus de spanningen - tussen alle knooppunten en dit knooppunt worden als variabelen beschouwd. Korte halve worden deze met U_1, U_2, U_3 aangeduid in plaats van met U_{10}, U_{20}, U_{30} .

Alle spanningen kunnen in deze variabelen worden uitgedrukt. Dus $U_{23} = U_2 - U_3$. De stromen in de verschillende takken worden aangegeven

door vergelijkingen zoals $I_5 = G_5 (U_3 - U_2)$. We passen nu de stroomwet van Kirchhoff in elk knooppunt toe.

Dus

$$- I_0 + G_1(U_1 - U_3) + G_2 (U_1 - U_2) = 0 \quad (1)$$

$$G_2(U_2 - U_1) + G_3 U_2 + G_5(U_2 - U_3) = 0 \quad (2)$$

$$G_1(U_3 - U_1) + G_5(U_3 - U_2) + G_4 U_3 = 0 \quad (3)$$

$$- G_4 U_3 - G_3 U_2 + I_0 = 0. \quad (4)$$

Deze vergelijkingen zijn echter niet onafhankelijk, bijvoorbeeld de vierde vergelijking kan worden verkregen door de eerste drie op te tellen en alle termen met -1 te vermenigvuldigen. Wij kunnen derhalve de vierde vergelijking weglaten.

De eerste drie vergelijkingen kunnen systematischer als volgt worden geschreven:

$$I_0 = (G_1 + G_2) U_1 - G_2 U_2 - G_1 U_3$$

$$0 = -G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_5) U_2 - G_5 U_3$$

$$0 = -G_1 U_1 - G_5 U_2 + (G_1 + G_4 + G_5) U_3.$$

Deze vergelijkingen hadden direct opgeschreven kunnen worden indien wij de volgende regel gevolgd hadden:

De van de bron afkomstige stroom die naar knooppunt k toevloeft is gelijk aan het produkt van de spanning U_k en de som van alle geleidingen die in knooppunt k uitmonden, verminderd met de som van de produkten van alle andere spanningen U_l met de geleidingen die knooppunt k met knooppunt l direct verbinden.

(Opmerking: Alle spanningen zijn de potentiaalverschillen tussen de desbetreffende knooppunten en het referentieknooppunt. Afvloeiende stromen moeten van een minteken worden voorzien. Bijvoorbeeld, indien wij de vierde vergelijking (knooppunt 0) hadden gebruikt, dan was deze geschreven als $-I_0 = -G_3 U_2 - G_4 U_3$. Elke vergelijking blijft steeds de stroomwet uitdrukken.)

Deze knooppuntsmethode is steeds bruikbaar, ook voor niet-planaire netwerken. Wij hebben de bruikbaarheid niet bewezen, maar slechts voor deze brugschakeling geverifiëerd.

De oplossing van de vergelijkingen luidt:

$$U_1 = \frac{1}{\Delta} \left[G_5 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (G_1 + G_4) (G_2 + G_3) \right] I_0$$

$$U_2 = \frac{1}{\Delta} \left[G_5 (G_1 + G_2) + G_2 (G_1 + G_4) \right] I_0$$

$$U_3 = \frac{1}{\Delta} \left[G_5 (G_1 + G_2) + G_1 (G_2 + G_3) \right] I_0 ,$$

waarin $\Delta = G_5 (G_1 + G_2) (G_3 + G_4) + G_2 G_3 (G_1 + G_4) + G_1 G_4 (G_2 + G_3)$.

Het is dan heel eenvoudig de spanningen over, of de stromen door, de verschillende geleiders te berekenen.

Zowel uit deze oplossingen als uit die van § I.12 kan de voorwaarde voor het in evenwicht zijn van de brug van Wheatstone worden afgeleid.

Wanneer de stroom $I_5 = 0$, is de brug in evenwicht, d.w.z. in § I.12 is $I_1 - I_4 = 0$; hier is $U_3 - U_2 = 0$.

Hieruit volgt $R_2 R_4 = R_1 R_3$

$$G_2 G_4 = G_1 G_3$$

$$\text{of } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} .$$

Op deze vergelijking berusten vele meetmethoden. In het onderhavige geval kan één weerstand bepaald worden wanneer de andere drie bekend zijn. Hiertoe wordt een stroomdetectie-apparaat (galvanometer) gebruikt om het nul zijn van I_5 te bepalen.

Opgave: Leid de voorwaarde van het in evenwicht zijn van de brug van Wheatstone af door gebruik te maken van spanningsdeling. Geef ook een afleiding gebaseerd op stroomdeling.

I.13. Verdere toepassingen van de maas- en knooppuntsmethode

Een voorbeeld van een netwerk met twee soorten bronnen is dat van fig. 21.

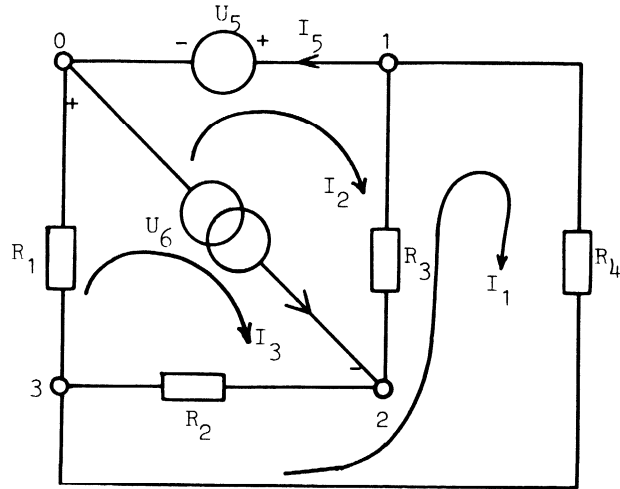


Fig. 21

I.13.1.

Volgens de maasmethode verkrijgen wij

$$0 = (R_2 + R_3 + R_4) I_1 - R_3 I_2 - R_2 I_3 \quad (1)$$

$$U_5 + U_6 = -R_3 I_1 + R_3 I_2 \quad (2)$$

$$-U_6 = -R_2 I_1 + 0 + (R_1 + R_2) I_3 \quad (3)$$

Echter U_6 is geen bekende maar een onbekende variabele.

Aan de andere kant is

$$I_6 = I_3 - I_2 \quad (4)$$

wel bekend.

Wij kunnen nu als onbekende variabelen I_1 , I_3 en U_6 nemen en de drie vergelijkingen oplossen. Hiertoe wordt (4) gebruikt om I_2 te elimineren uit (1), (2), (3).

$$\text{Dus} \quad -R_3 I_6 = (R_2 + R_3 + R_4) I_1 - (R_2 + R_3) I_3 \quad (1)$$

$$U_5 + R_3 I_6 = -R_3 I_1 + R_3 I_3 - U_6 \quad (2)$$

$$0 = -R_2 I_1 + (R_1 + R_2) I_3 + U_6 \quad (3)$$

Deze vergelijkingen kunnen voor I_1 , I_3 , U_6 worden opgelost, en hieruit kunnen alle onbekende stromen en spanningen worden bepaald.

I.13.2.

Volgens de knooppuntsmethode verkrijgen wij

$$-I_5 = (G_3+G_4) U_1 - G_3 U_2 - G_4 U_3 \quad (5)$$

$$I_6 = -G_3 U_1 + (G_2+G_3) U_2 - G_2 U_3 \quad (6)$$

$$0 = -G_4 U_1 - G_2 U_2 + (G_1+G_2+G_4) U_3. \quad (7)$$

Maar I_5 is geen bekende variabele; U_5 is wel bekend.

$$U_1 = U_5. \quad (8)$$

Wij kunnen U_2 , U_3 , I_5 als onbekende variabelen kiezen en (8) gebruiken om U_1 uit (5), (6), (7) te elimineren. Zodoende verkrijgen wij

$$-(G_3+G_4) U_5 = -G_3 U_2 - G_4 U_3 + I_5 \quad (5)$$

$$I_6 + G_3 U_5 = (G_2+G_3) U_2 - G_2 U_3 \quad (6)$$

$$G_4 U_5 = -G_2 U_2 + (G_1+G_3+G_4) U_3. \quad (7)$$

Deze vergelijkingen kunnen voor U_2 , U_3 , I_5 worden opgelost en hieruit kunnen alle stromen en spanningen worden bepaald. Het is leerzaam beide stelsels vergelijkingen op te lossen en aan te tonen dat zij werkelijk hetzelfde resultaat leveren. Toevallig is in dit voorbeeld het stelsel (5), (6), (7) (knooppuntsmethode) gemakkelijker op te lossen dan het stelsel (1), (2), (3) (maasmethode).

2. NETWERKSTELLINGEN EN HULPMIDDELEN BIJ NETWERKBEREKENINGEN

2.1. Superpositie

In het voorgaande hebben wij een aantal methoden voor het oplossen van netwerkproblemen besproken. Al deze methoden berusten op de wetten van Kirchhoff en de wet van Ohm. Deze wetten geven lineaire, homogene relaties tussen de stromen en spanningen aan, d.w.z. dat de stromen of spanningen slechts in de eerste macht voorkomen. Er komt geen U^2 , U^3 , UI , $\sin(U)$, $\ln(I)$ enz. voor, slechts het produkt van een variabele U of I met een niet van U of I afhankelijke coëfficiënt.

Bij de oplossing van een netwerkprobleem gaan wij uit van een aantal vergelijkingen die lineair en homogeen in de stromen en spanningen zijn. Hierbij moeten wij bedenken dat wij alle bronsterkten alsmede de onbekende stromen en spanningen onder het hoofd "stromen en spanningen" rangschikken. Anders zouden de vergelijkingen niet homogeen zijn.

Teneinde tot een oplossing te komen worden sommige variabelen stapsgewijze geëlimineerd. Bij de eliminatie van een variabele uit twee lineaire vergelijkingen worden de vergelijkingen zo nodig vermenigvuldigd met constanten en bij elkaar opgeteld. Het resultaat is nog een lineaire, homogene vergelijking. Uiteindelijk worden vergelijkingen verkregen waarbij de afhankelijke in de onafhankelijke variabelen worden uitgedrukt. Als voorbeeld, beschouwen wij het geval dat alle takstromen in de spanningsbronsterkten worden uitgedrukt:

$$I_1 = A_{11} U_1 + A_{12} U_2 + \dots + A_{1m} U_m$$

$$I_2 = A_{21} U_1 + A_{22} U_2 + \dots + A_{2m} U_m$$

.....

$$I_n = A_{n1} U_1 + A_{n2} U_2 + \dots + A_{nm} U_m.$$

Eén bepaalde verdeling van stromen en spanningen in de takken van het netwerk noemen wij een toestand van het netwerk. Een toestand wordt

dus bepaald door een stelsel waarden van de stroom- en spanningssterkten die aan het hierboven geschreven stelsel netwerkvergelijkingen voldoen.

Wij beschouwen nu twee verschillende toestanden welke wij met de symbolen (I' , U') respectievelijk (I'' , U'') aanduiden. Wij hebben dan de relaties

$$I'_1 = A_{11} U'_1 + A_{12} U'_2 + \dots + A_{1m} U'_m$$

$$I'_2 = A_{21} U'_1 + A_{22} U'_2 + \dots + A_{2m} U'_m$$

.....

$$I'_n = A_{n1} U'_1 + A_{n2} U'_2 + \dots + A_{nm} U'_m ,$$

$$I''_1 = A_{11} U''_1 + A_{12} U''_2 + \dots + A_{1m} U''_m$$

$$I''_2 = A_{21} U''_1 + A_{22} U''_2 + \dots + A_{2m} U''_m$$

.....

$$I''_n = A_{n1} U''_1 + A_{n2} U''_2 + \dots + A_{nm} U''_m .$$

Door vermenigvuldiging van de twee stelsels vergelijkingen met willekeurige constanten α , respectievelijk β , en optelling van de resultanten verkrijgen wij

$$\alpha I'_1 + \beta I''_1 = A_{11} (\alpha U'_1 + \beta U''_1) + A_{12} (\alpha U'_2 + \beta U''_2) + A_{13} (\alpha U'_3 + \beta U''_3) + \dots$$

$$\alpha I'_2 + \beta I''_2 = A_{21} (\alpha U'_1 + \beta U''_1) + A_{22} (\alpha U'_2 + \beta U''_2) + A_{23} (\alpha U'_3 + \beta U''_3) + \dots$$

.....

$$\alpha I'_n + \beta I''_n = A_{n1} (\alpha U'_1 + \beta U''_1) + A_{n2} (\alpha U'_2 + \beta U''_2) + A_{n3} (\alpha U'_3 + \beta U''_3) + \dots$$

M.a.w., zijn (I' , U') en (I'' , U'') twee verschillende toestanden, dan is ($\alpha I' + \beta I''$, $\alpha U' + \beta U''$) ook een toestand.

Aangezien de α en β willekeurig zijn, kunnen wij het resultaat als volgt interpreteren: een gegeven toestand kan worden opgevat als de superpositie van twee andere toestanden.

Dit is een algemene eigenschap voor lineaire systemen, d.w.z. systemen die beschreven kunnen worden door lineaire, homogene vergelijkingen. Het zal duidelijk zijn dat wij in deze afleiding geen gebruik van de speciale eigenschappen van de stroom als wezenlijk verschillend van de spanning hebben gemaakt. Wij hebben slechts met variabelen te maken, zodat de superpositie geldig blijft als wij een willekeurig aantal stromen en spanningen uitdrukken in een willekeurig aantal stroom- en spanningsbronsterkten.

Een bijzonder geval is dat waar er slechts twee bronnen aanwezig zijn, met sterkten die wij U_1 en U_2 kunnen noemen. Kiezen wij de toestanden zodanig dat $U_1' = U_1$, $U_2' = 0$ en $U_1'' = 0$, $U_2'' = U_2$ en $\alpha = \beta = 1$, dan volgt dat de werkelijke stromen I_1, I_2, \dots, I_m , die bij de U_1 en U_2 behoren, volgen uit de superpositie van I_1', I_2', \dots, I_m' en $I_1'', I_2'', \dots, I_m''$, die bij de U_1' , U_2' respectievelijk U_1'' , U_2'' behoren.

M.a.w., wij kunnen de werkelijke stromen berekenen door de stromen te berekenen - wanneer telkens een van de bronsterkten gelijk nul wordt gesteld - en daarna de resultanten op te tellen.

Bevat het netwerk meer dan twee bronnen, bijvoorbeeld U_1, U_2, U_3, \dots , dan kunnen wij de werkelijke stromen berekenen als de superpositie van de twee toestanden: $U_1' = U_1$, $U_2' = 0$, $U_3' = 0, \dots$ en $U_1'' = 0$, $U_2'' = U_2$, $U_3'' = U_3, \dots$. De tweede toestand kan echter worden opgevat als de superpositie van twee toestanden: $U_1''' = 0$, $U_2''' = U_2$, $U_3''' = 0$, $U_4''' = 0, \dots$ en $U_1'''' = 0$, $U_2'''' = 0$, $U_3'''' = U_3$, $U_4'''' = U_4, \dots$. Eveneens kan deze laatste toestand worden opgevat als de superpositie van twee eenvoudigere toestanden. Bovendien kunnen wij in het voorgaande een aantal spanningsbronnen vervangen door stroombronnen en een aantal van de te berekenen stromen vervangen door spanningen met behoud van de geldigheid van de superpositie.

Wij komen dan tot een formulering van het algemene superpositiebeginsel voor netwerken.

Bevat een lineair netwerk n bronnen, dan kunnen alle stromen en spanningen in het netwerk worden berekend door telkens deze te berekenen voor ieder van de n gevallen waarin alle bronsterkten op een na gelijk aan nul worden gesteld, en de n resultanten op te tellen.

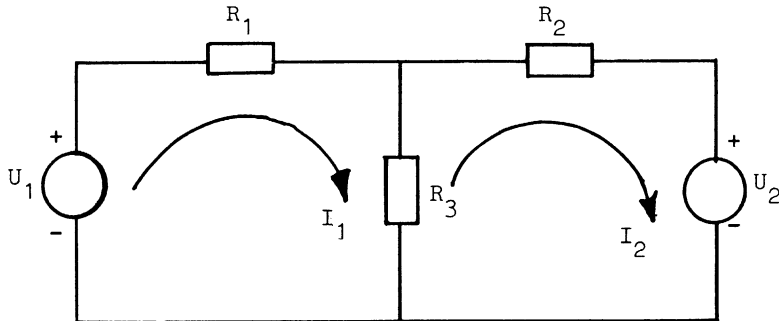


Fig. 22

Voorbeeld 1

In fig. 22 kunnen wij de volgende maasvergelijkingen opschrijven

$$\begin{aligned} U_1 &= (R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 \\ -U_2 &= -R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 . \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\left. \begin{aligned} \Delta I_1 &= (R_2 + R_3) U_1 - R_3 U_2 \\ \Delta I_2 &= R_3 U_1 - (R_1 + R_3) U_2 , \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

waarin $\Delta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$.

Hier zien wij dat bijvoorbeeld I_1 gelijk is aan de som van twee termen, namelijk

$$\frac{R_2 + R_3}{\Delta} U_1 \quad \text{en} \quad \frac{-R_3}{\Delta} U_2 ,$$

die verkregen kunnen worden door beurtelings U_2 en U_1 in vergelijkingen (1) gelijk aan nul te stellen. Met andere woorden, I_1 kan worden bepaald

door de som van de stromen in de twee netwerken van fig. 23 te berekenen.

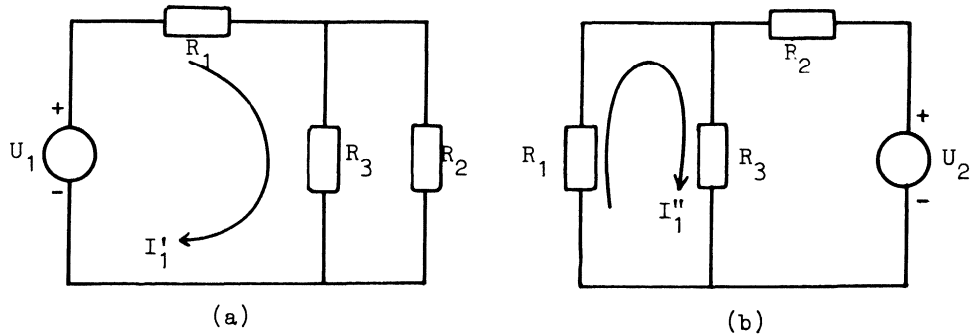


Fig. 23

Deze netwerken ontstaan door in fig. 22 beurtelings U_2 en U_1 gelijk nul te stellen, d.w.z. in de desbetreffende tak de spanningsbron te vervangen door een kortsluiting. Wij vinden

$$I'_1 = \frac{U_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)}{\Delta} U_1 ,$$

$$I''_1 = \frac{-U_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{-R_3}{\Delta} U_2 ,$$

waarin $\Delta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$.

In dit voorbeeld is $\alpha = \beta = 1$, $U'_1 = U_1$, $U'_2 = 0$, $U''_1 = 0$, $U''_2 = U_2$.

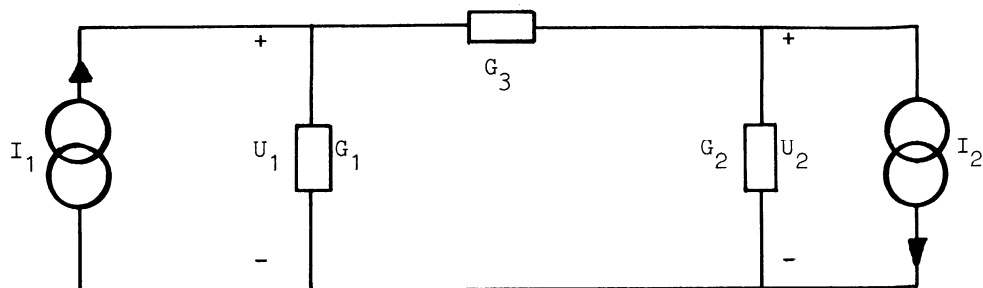
Voorbeeld 2

Fig. 24

De knooppuntsvergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} I_1 &= (G_1 + G_3) U_1 - G_3 U_2 \\ -I_2 &= -G_3 U_1 + (G_2 + G_3) U_2 . \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= (G_2 + G_3) I_1 - G_3 I_2 \\ \Delta U_2 &= G_3 I_1 - (G_1 + G_3) I_2 , \end{aligned}$$

waarin $\Delta = G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_1$.

Hier zien wij dat bijvoorbeeld U_1 gelijk is aan de som van twee termen, namelijk,

$$\frac{G_2 + G_3}{\Delta} I_1 \quad \text{en} \quad \frac{-G_3}{\Delta} I_2 ,$$

die verkregen kunnen worden door beurtelings I_2 en I_1 gelijk nul te stellen. Met andere woorden, U_1 kan worden bepaald door de som van de twee spanningen in de twee netwerken van fig. 25 te berekenen.

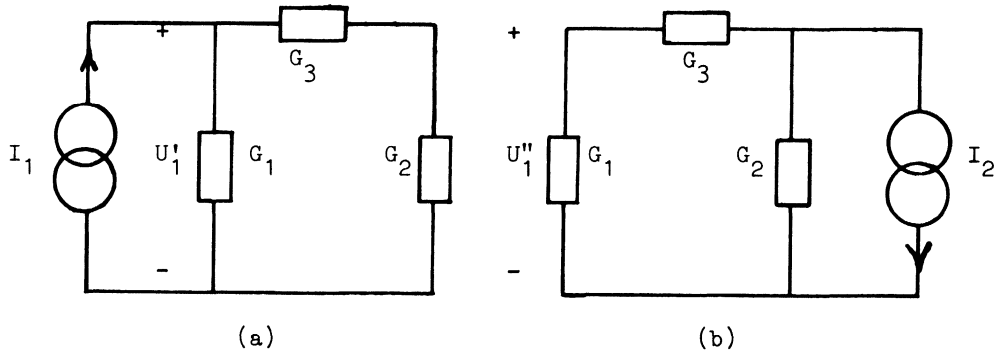


Fig. 25

Deze netwerken ontstaan door in fig. 24 beurtelings I_2 en I_1 gelijk aan nul te stellen, d.w.z. de stroombron uit de desbetreffende tak te verwijderen. Met behulp van de methoden in par. I.11. vinden wij

$$U'_1 = \frac{I_1}{G_1 + \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3}} = \frac{(G_2 + G_3)}{\Delta} I_1,$$

$$U''_1 = \frac{-I_2}{G_2 + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3}} \cdot \frac{G_3}{G_1 + G_3} = \frac{-G_3}{\Delta} I_2,$$

waarin $\Delta = G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_1$.

In dit voorbeeld is $\alpha = \beta = 1$, $I'_1 = I_1$, $I'_2 = 0$, $I''_1 = 0$, $I''_2 = I_2$.

Deze voorbeelden tonen aan dat het superpositiebeginsel een hulpmiddel bij netwerkberekeningen verschaft, dat in sommige gevallen sneller tot resultaten voert dan de maas- of knooppuntmethode.

Opgave. Vervang de stroombron I_2 door een spanningsbron in fig. 26 en bereken het resulterende netwerk m.b.v. het superpositiebeginsel.

Opmerkingen: Het superpositiebeginsel is in het algemeen slechts geldig als het systeem lineair is. Het beginsel geldt in het algemeen niet voor het berekenen van het vermogen - hoewel in bepaalde speciale gevallen, waarvan één in een ander hoofdstuk zal worden behandeld, het beginsel wel kan worden toegepast.

Voorbeeld 3

Vloeit er bijvoorbeeld een stroom van 5 A door een weerstand van 1 Ω , dan bedraagt het vermogen 25 W. Dit is niet gelijk aan de superpositie van een vermogen van 4 W, behorende bij een stroom van 2 A en een vermogen van 9 W, behorende bij een stroom van 3 A.

Voorbeeld 4

In een bepaald niet-lineair netwerk wordt de stroom gegeven door $I = A U_1 + B U_2^2$. Kiezen wij $U_1' = U_1$, $U_2' = 0$, $U_1'' = 0$, $U_2'' = U_2$, dan ontstaat wel de juiste stroom door superpositie van deze twee toestanden. Kiezen wij echter twee algemene toestanden, dan volgt

$$I' = A U_1' + B U_2'^2$$

$$I'' = A U_1'' + B U_2''^2$$

$$\alpha I' + \beta I'' = A (\alpha U_1' + \beta U_1'') + B (\alpha U_2'^2 + \beta U_2''^2)$$

$$\neq A (\alpha U_1' + \beta U_1'') + B (\alpha U_2' + \beta U_2'')^2,$$

tenzij $\alpha \beta U_2' U_2'' = 0$, zoals hierboven is vermeld.

Voorbeeld 5

De weerstand van een gloeidraad van een gloeilamp is een functie van de temperatuur van de draad. De temperatuur is een functie van het gedissipeerde vermogen en het vermogen is een functie van de stroom.

De spanning over de gloeidraad is dus een niet-lineaire functie van de stroom $U = f(I)$. Hiervoor geldt het superpositiebeginsel niet.

2.2. Het Theorema van Tellegen

Het volgende door B.D.H. Tellegen in 1952 geformuleerde theorema is een zeer belangrijk theorema met vergaande consequenties.

Stel dat in een netwerk stromen vloeien die aan de stroomwet van Kirchhoff voldoen. Stel dat er over de verschillende takken spanningen zijn, die aan de spanningswet van Kirchhoff voldoen. Stel dat de positieve stroomrichting en positieve spanningspolariteit van elke tak worden gekozen volgens fig. 6. Dan volgt uitsluitend uit deze voorwaarden dat de som van de produkten van de takspanning en takstroom over alle takken gelijk aan nul is.

Dit theorema is een gevolg van de wetten van Kirchhoff en heeft niets met de wet van Ohm te maken; het is ook geldig voor niet-lineaire netwerken, die echter niet in dit college behandeld zullen worden.

Bewijs: De takspanningen kunnen worden uitgedrukt in knooppuntspotentialen (§ I.13). Dus $U_{kl} = V_k - V_l$, waarin U_{kl} de spanning over de tak (of takken) die knooppunt k met knooppunt l direct verbindt, en V_k en V_l de potentialen van de knooppunten k en l ten opzichte van het referentieknooppunt zijn. Dan geldt:

$$\sum U_{kl} I_{kl} = \sum (V_k - V_l) I_{kl} ,$$

waarbij de sommatie wordt uitgevoerd over alle takken.

I_{kl} wil zeggen dat de positieve stroomrichting van knooppunt k naar knooppunt l loopt (§ I.5.3). In deze sommatie moeten k en l alle waarden aannemen die corresponderen met een tak tussen de twee knooppunten. Wanneer er geen directe verbinding tussen bijvoorbeeld knooppunt m en n aanwezig is, kunnen wij toch een term $(V_m - V_n) I_{mn}$ aan de sommatie toevoegen, indien wij $I_{mn} = 0$ stellen.

Onder deze voorwaarde is

$$\sum_t (V_k - V_l) I_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_k - V_l) I_{kl} ,$$

waarin \sum_t een sommatie over alle takken aanduidt.

De factor $\frac{1}{2}$ ontstaat doordat in de laatst geschreven vorm elke tak twee keer voorkomt, en volgens onze richtingsafspraken

$$I_{kl} = -I_{lk}, \text{ zodat } (V_k - V_l) I_{kl} = (V_l - V_k) (-I_{lk}).$$

$$\text{Nu is } \sum_k \sum_l (V_k - V_l) I_{kl} = \sum_k (V_k \sum_l I_{kl}) - \sum_l (V_l \sum_k I_{kl}) = 0,$$

vanwege de stroomwet van Kirchhoff, namelijk $\sum_l I_{kl}$ is gelijk aan de algebraïsche som van de stromen die van knooppunt k wegvloeien, en is dus nul, terwijl $\sum_k I_{kl}$ gelijk is aan de algebraïsche som van alle stromen die naar knooppunt l toevloeien, en is dus ook nul.

Aangezien het bewijs uitsluitend gebruik maakt van de wetten van Kirchhoff (de spanningswet werd gebruikt toen wij $U_{kl} = V_k - V_l$ stelden), behoeven de spanning en stroom niet op dezelfde toestand betrekking te hebben, en evenmin op hetzelfde netwerk. Wat wel noodzakelijk is, is dat de configuraties van de twee netwerken gelijk zijn, d.w.z. hetzelfde aantal knooppunten en takken en dezelfde onderlinge relaties.

Voorbeeld (fig. 26)

$$\begin{aligned} \sum_t U I &= -V_1 I_0 + (V_1 - V_3) I_1 + (V_1 - V_2) I_2 + (V_3 - V_2) I_5 \\ &\quad + V_3 I_4 + V_2 I_3 \\ &= V_1 (-I_0 + I_1 + I_2) + V_2 (-I_2 - I_5 + I_3) + V_3 (-I_1 + I_5 + I_4), \end{aligned}$$

en elke term tussen haakjes is gelijk aan nul vanwege de stroomwet. Het resultaat is onafhankelijk van de G's.

Voor fig. 26 b kunnen wij een dergelijke vergelijking opschrijven, maar met I' respectievelijk V' in plaats van I , V . Dezelfde conclusie geldt hier ook. Tenslotte kunnen wij de stromen voor netwerk a combineren met de spanningen van netwerk b (of omgekeerd) met als resultaat

$$\sum_t U' I = V'_1 (-I_0 + I_1 + I_2) + V'_2 (-I_2 - I_5 + I_3) + V'_3 (-I_1 + I_5 + I_4) = 0.$$

Ook voor allerlei mogelijk verschil in elementwaarde of elementtype van de twee netwerken blijft het resultaat geldig.

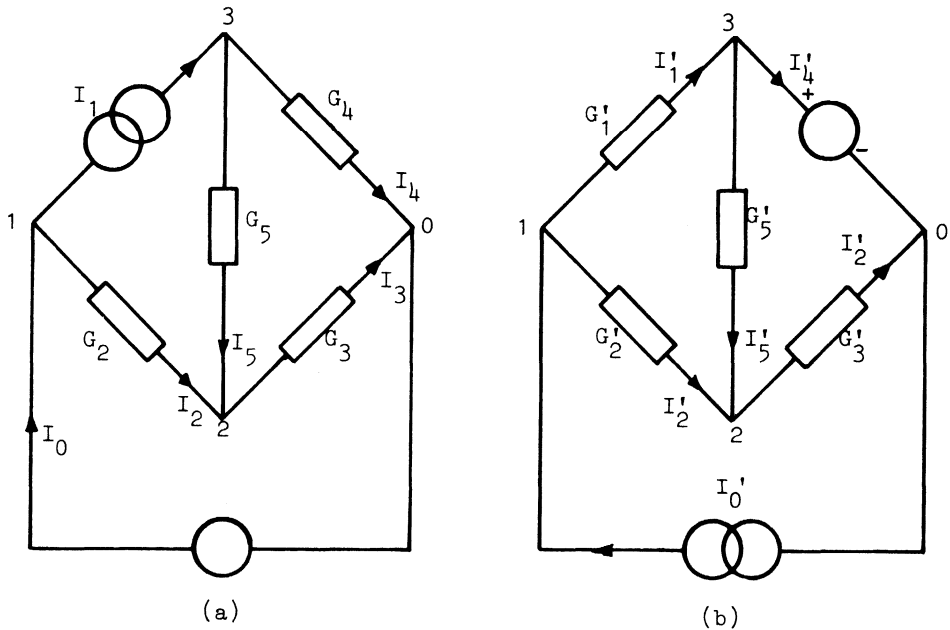


Fig. 26

Wat wij niet mogen doen, is het aantal takken, of knooppunten, of hun onderlinge relaties, veranderen.

2.2.1. Behoud van vermogen

In het speciale geval dat de spanning en stroom op dezelfde toestand betrekking hebben, verkrijgen wij direct de wet van behoud van vermogen. Deze wet volgt dus uit de wetten van Kirchhoff en behoeft niet als een apart beginsel te worden ingevoerd. Wij hebben reeds in § 1.2 gezien dat $U I$ het door de tak opgenomen vermogen is. Volgens het theorema kunnen wij schrijven

$$\sum_w U I = - \sum_b U I ,$$

waarin \sum_w , \sum_b sommatie over alle weerstanden respectievelijk bronnen betekenen. D.w.z., het totale door de weerstanden opgenomen (gedissipeerde) vermogen is gelijk aan het totale door de bronnen geleverde vermogen. Achter deze netwerktheoretische beschrijving steekt de fysische omzetting van chemische of mechanische energie door de bronnen in elektrische energie, de energieoverdracht naar de weerstanden en het omzetten van deze energie in warmte.

2.2.2. Het reciprociteitstheorema

Uit een tweede speciaal geval kunnen wij het reciprociteitstheorema afleiden:

- a) Stel dat in een bepaalde tak van het netwerk de stroom ten gevolge van een in een andere tak van het netwerk aanwezige spanningsbron bepaald moet worden. Als de posities van de bron en de te meten stroom verwisseld worden, dan zijn de gemeten stromen in de twee situaties gelijk.
- b) Indien in het voorgaande "spanningsbron" door "stroombron" en "stroommetering" door "spanningsmeting" vervangen worden, dan is de resulterende stelling ook geldig.

Deze stelling wordt aan de hand van de brugschakeling in fig. 27 toege-
licht.

Symbolisch kunnen wij het netwerk op de volgende wijze voorstellen (fig. 28). Binnen het kastje "netwerk" bevinden zich weerstanden maar geen bronnen.

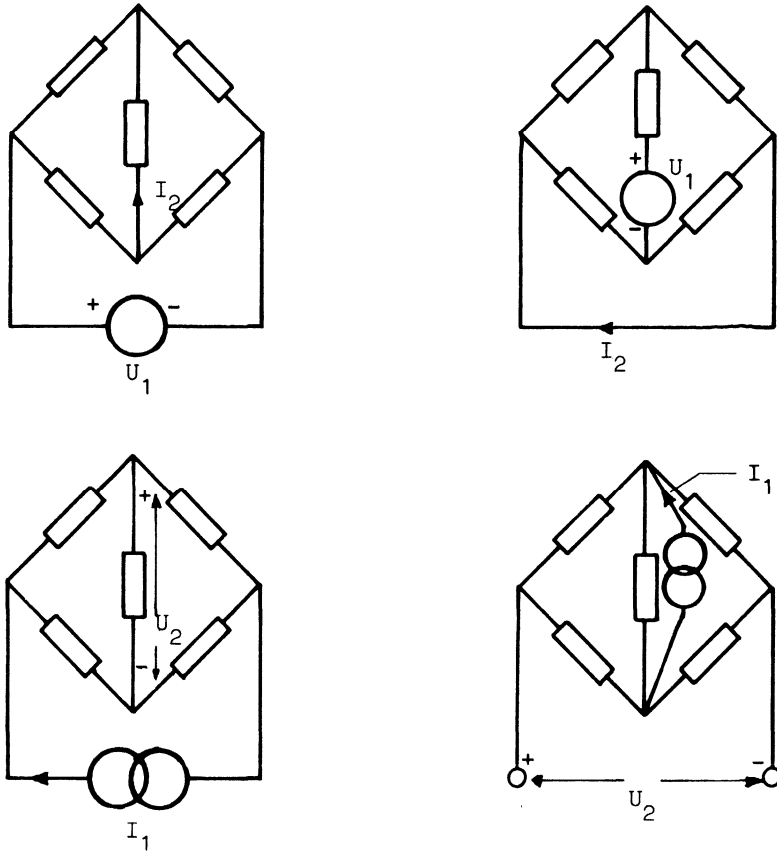


Fig. 27 illustreert het reciprociteitstheorema

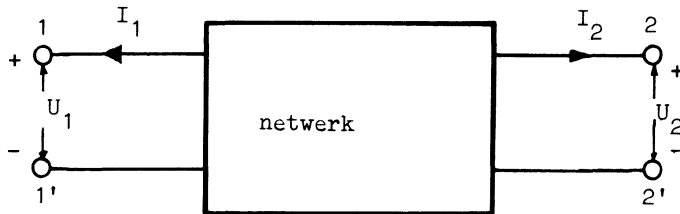


Fig. 28

Aan de aansluitklemmen (1,1'), of (2,2') kunnen wij bronnen verbinden of kortsluitende draden en de stroom daardoor meten, of wij kunnen de klemmen open laten en de spanning tussen de klemmen meten.

Om het theorema te bewijzen beschouwen wij twee toestanden (U_k, I_k) en (U'_k, I'_k) waarin U_k en I_k de spanning over, en de stroom in tak k voorstellen.

Dan geldt volgens het theorema van Tellegen

$$\sum_w U_k I'_k = - (U_1 I'_1 + U_2 I'_2) , \quad \sum_w U'_k I_k = - (U'_1 I_1 + U'_2 I_2) ,$$

waarbij \sum de sommatie over alle weerstanden, d.w.z. over alle inwendige takken w betekent.

Maar $U_k I'_k = R_k I_k I'_k$ (k over alle weerstanden).

$$- U'_1 I_1 - U'_2 I_2 = \sum_w U'_k I_k = \sum_w R_k I_k I'_k = \sum_w U_k I'_k = - U_1 I'_1 - U_2 I'_2.$$

Stel nu $U'_1 = 0 = U_2$. Dat wil zeggen, in de eerste situatie (variabelen U_k, I_k) worden de klemmen 2,2' kortgesloten en in de tweede situatie worden de klemmen 1,1' kortgesloten. Dan is $U_1 I'_1 = U'_2 I_2$.

Als wij bovendien $U_1 = U'_2$ stellen dan is $I'_1 = I_2$, hetwelk het eerste deel van de stelling bewijst. Als wij nu in plaats van het voorgaande, $I'_1 = I_2 = 0$ en $I_1 = I'_2$ stellen, dan is $U'_1 = U_2$, hetwelk het tweede deel van de stelling bewijst.

Het reciprociteitstheorema kan vaak gebruikt worden bij bepaalde metingen, zoals enigszins door het voorbeeld van de brugschakeling is gesuggereerd. Anderzijds kan soms een bepaalde berekening door toepassing van het theorema worden vereenvoudigd.

Bij de studie van de geavanceerde netwerktheorie en de theorie van het elektromagnetisch veld is het theorema van aanzienlijk belang. Ook in de mechanica, sterkteleer en de thermodynamica komt het reciprociteitstheorema in verschillende vormen voor.

Opgave: Bereken de stromen I_1 en I_2 in fig. 29 en geef een verklaring van het resultaat.

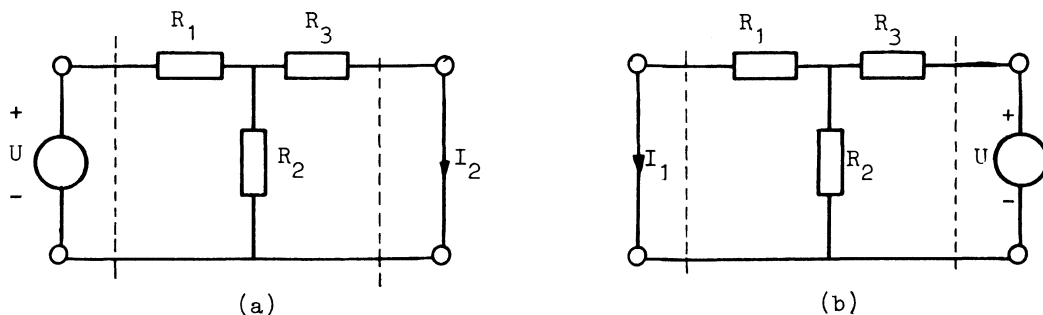


Fig. 29

Opmerkingen: Netwerken die buizen en transistoren bevatten, welke in het lineaire gebied van kleine signalen werken, beantwoorden in het algemeen niet aan het reciprociteitstheorema. (Zie in dit verband de dictaten elektronica I en II.) Netwerken welke wel aan het reciprociteitstheorema beantwoorden heten reciprook. Andere lineaire netwerken heten niet-reciprook. Het begrip reciprociteit kan alleen in een zeer bijzondere betekenis op zeer speciale niet-lineaire netwerken worden toegepast.

2.3. De theorema's van Thévenin (Helmholtz) en Norton (Mayer)*

Gegeven een lineair netwerk dat van twee klemmen a en b voorzien is. Het netwerk zelf bestaat uit weerstanden en bronnen. Via de klemmen kunnen andere netwerken of apparaten worden aangesloten. De wisselwerking tussen het gegeven netwerk en de aangesloten apparaten wordt uitsluitend bepaald door relaties tussen de stroom en spanning aan de klemmen. Als wij het gegeven netwerk berekenen, verkrijgen wij een stelsel lineaire vergelijkingen in alle stromen en spanningen die in het netwerk aanwezig zijn.

*

H. Helmholtz, 1853; L.C. Thévenin, 1883

H.F. Mayer, 1926; E.L. Norton, niet gepubliceerd maar ca. 1926.

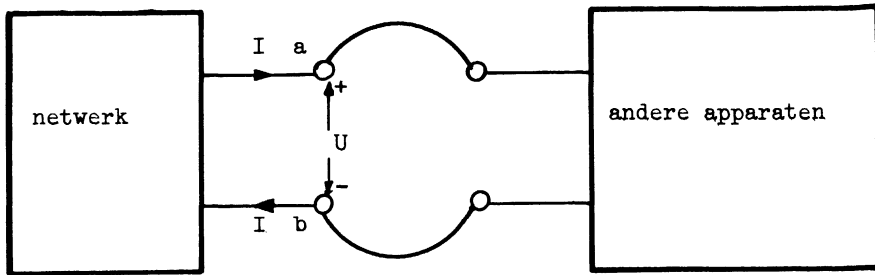


Fig. 30

Na alle overbodige interne spanningen en stromen geëlimineerd te hebben, wordt een vergelijking in de "uitwendige" variabelen verkregen - de stroom I en spanning U van de klemmen - die ook lineair is: $A U + B I - C = 0$, waarin A, B, C onafhankelijk van U en I zijn. De stromen in de twee toevoerdraden zijn gelijk en tegengesteld, daar er anders een ophoping van lading in het netwerk zou plaatsvinden. Bovendien is slechts het potentiaalverschil tussen de twee klemmen van belang en niet de absolute potentiaal. Zoals wij in verband met de knooppuntsmethode al gezien hebben, kunnen wij één van de knooppunten als referentie kiezen en met alle spanningen t.o.v. dit punt werken. In het bijzonder treedt de spanning tussen de klemmen op, als wij één van de klemmen als referentie kiezen. Als nu $A \neq 0$, krijgen wij $U = \frac{-B}{A} I + \frac{C}{A}$. Deze vergelijking beschrijft het netwerk van fig. 31a.

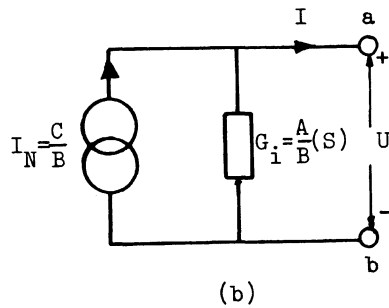
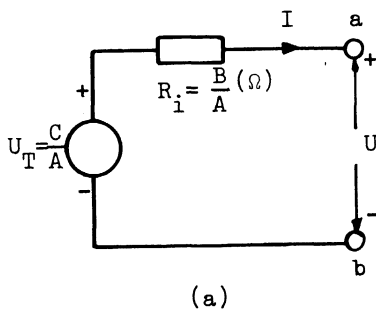


Fig. 31a geeft het Thévenin vervangingschema voor het netwerk links van de klemmen a en b

Fig. 31b noemt men de Norton equivalente schakeling

Hierin stelt B/A een weerstand en A/B een geleiding voor. Als $B \neq 0$, dan is $\frac{-A}{B} U + \frac{C}{B}$, en deze vergelijking beschrijft het netwerk van fig. 31b.

De conclusie is dat, wat de wisselwerking met andere netwerken betreft, het gegeven netwerk equivalent aan de vervangingsschema's van fig. 31 is. Het eerste schema is van Thévenin en Helmholtz, het tweede van Norton en Mayer.

Indien $A = 0$, dan geldt slechts het Norton-schema (in dit geval is de geleiding A/B nul) in de vorm van een zuivere stroombron. Indien $B = 0$, geldt slechts het Thévenin-schema in de vorm van een zuivere spanningsbron. Indien $A = B = 0$, dan is $C = 0$ en kan er geen vergelijking worden geschreven. De conclusie is dan dat U en I willekeurig zijn, hetgeen in strijd met alle fysische ervaring is. Wij sluiten derhalve deze mogelijkheid uit.

Indien in het oorspronkelijke netwerk alle bronsterkten gelijk nul worden gesteld, zijn alle stromen en spanningen nul (wet van behoud van vermogen). In de vervangingsschema's moeten de bronsterkten dan ook nul zijn. Wij noemen U_T de Thévenin-spanning en I_N de Norton-stroom.

In fig. 31a is de bronsterkte de gemeten open spanning U_T ($I=0$), en kan de serieweerstand uit deze spanning en de kortsluitstroom I_N worden berekend. D.w.z.,

$$R_i = \frac{B}{A} = \frac{C/A}{I_N} = \frac{U_T}{I_N}.$$

Nu is de serieweerstand gelijk aan de aan de klemmen gemeten weerstand, wanneer de Thévenin-spanning en dus alle bronsterkten gelijk nul worden gesteld.

In fig. 31b is de bronsterkte gelijk aan de gemeten kortsluitstroom I_N en wordt de parallelgeleiding gegeven door

$$G_i = \frac{A}{B} = \frac{C/B}{U_T} = \frac{I_N}{U_T}.$$

Nu is de parallelgeleiding gelijk aan de aan de klemmen gemeten geleiding wanneer de Norton-stroom en dus alle bronsterkten gelijk nul worden gesteld.

Deze resultaten verschaffen nog een hulpmiddel voor het berekenen van netwerken. Als voorbeeld nemen wij weer de brugschakeling (fig. 32) en wij vragen het schema van Thévenin voor de klemmen a, b. De open spanning volgt direct uit de resultaten voor spanningsdeling.

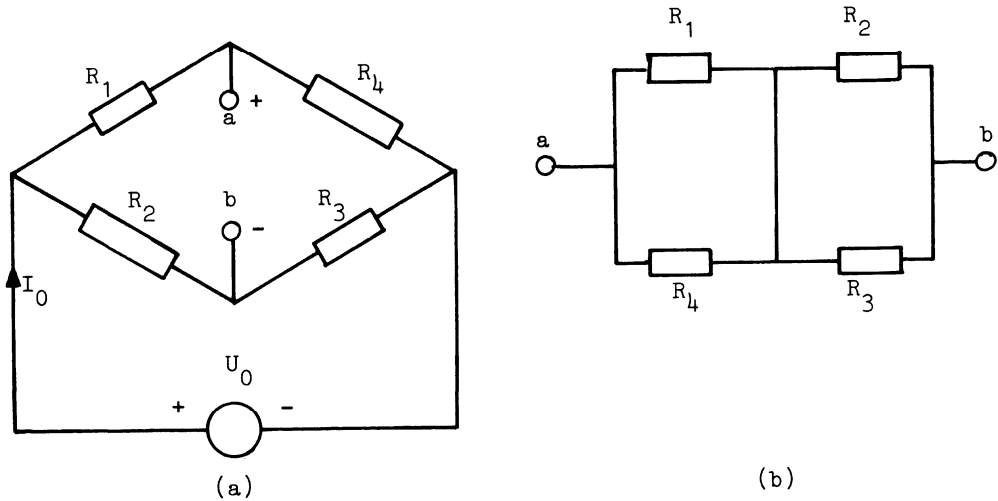


Fig. 32

Dus

$$U_T = \left(\frac{R_4}{R_1 + R_4} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) U_0 .$$

De kortsluitstroom is het verschil tussen de stromen door R_1 (positieve richting: vloeiende naar a toe) en R_4 (positieve richting: vloeiende van a af), als a en b kortgesloten worden. Dan m.b.v. de resultaten voor stroomdeling vinden wij in fig. 32a.

$$I_N = \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2} - \frac{G_4}{G_3 + G_4} \right) I_0 ,$$

$$I_0 = \frac{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} U_0 ,$$

zodat

$$I_N = \frac{G_1 G_3 - G_2 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} U_0 .$$

De vervangingschema's van Thévenin en Norton kunnen verder uit deze resultaten worden bepaald.

De weerstand R_i volgt uit de relatie $R_i = U_T / I_N$ of uit een directe berekening van de serie-schakeling van R_1 en R_4 parallel en R_2 en R_3 parallel:

$$R_i = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{(G_1 + G_4)(G_2 + G_3)} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (\text{zie fig. 32b}).$$

Voorbeeld:

$U_0 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 6 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$.

De Thévenin- en Norton-schema's worden gegeven in fig. 33.

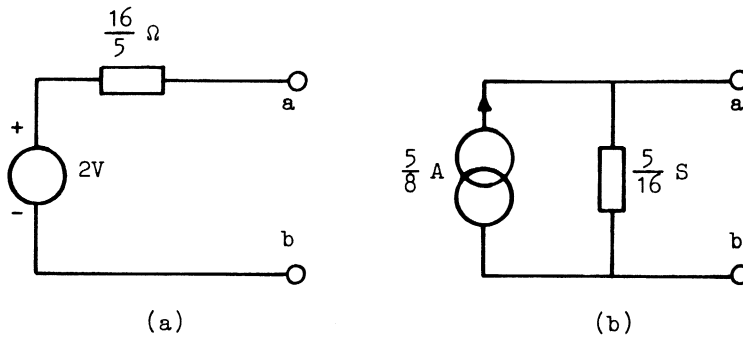


Fig. 33

Opgave: Reken deze schema's na en toon hun equivalentie aan.

Opmerking: Zoals uit de afleiding blijkt verschaffen de schema's van Thévenin en Norton een middel om de spanning over en de stroom door de klemmen te bepalen. Er kunnen uit de schema's geen conclusies worden getrokken over de stroom- spanning- en vermogensverdeling binnen het netwerk.

Opgave: Bepaal het gedissipeerde vermogen in de weerstand van de schema's van fig. 33 en toon aan dat dit vermogen bij gelijke afsluiting van de klemmen met weerstanden, altijd verschilt in de twee schema's behalve in één speciaal geval. Bepaal dit geval en toon aan dat het vermogen dat dan in de afsluitweerstand wordt gedissipeerd maximaal is.

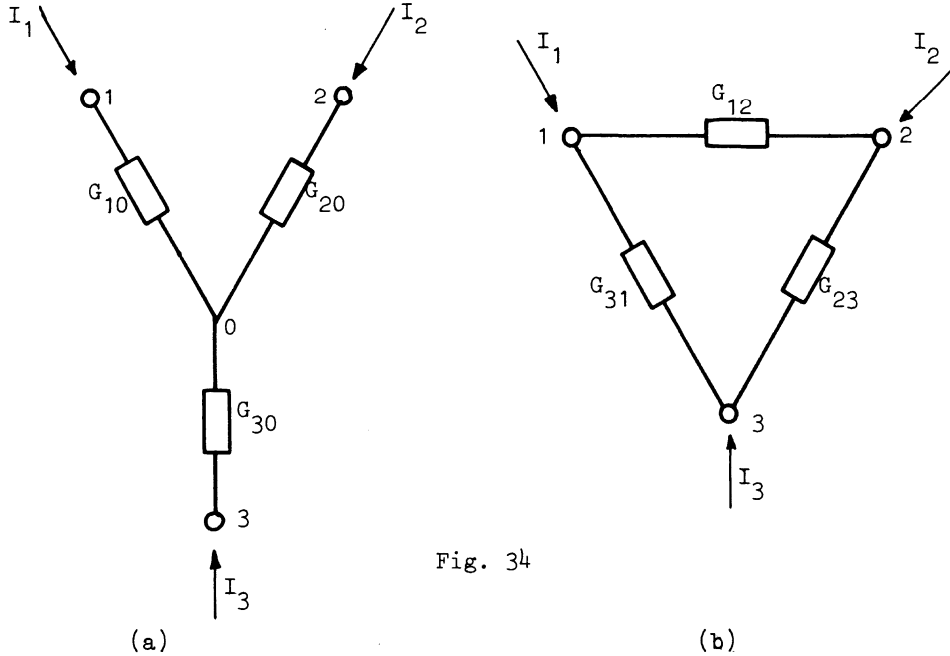
2.4. Equivalentie tussen de ster- en de driehoekschakeling2.4.1. Transformatie van de ster- naar de driehoekschakeling

Fig. 34

Gegeven de twee schakelingen van fig. 34. Wij vragen naar de voorwaarden waaronder de stromen en spanningen aan de klemmen in fig. 34a gelijk zijn aan de corresponderende stromen en spanningen in fig. 34b.

Voor fig. 34a kunnen wij de volgende vergelijkingen opschrijven

$$I_1 = G_{10} (V_1 - V_0), \quad I_2 = G_{20} (V_2 - V_0), \quad I_3 = G_{30} (V_3 - V_0),$$

waarin V_0, V_1, V_2, V_3 de potentialen van knooppunten 0, 1, 2, 3 zijn.

Toepassing van de stroomwet van Kirchhoff op knooppunt 0 geeft

$$0 = I_1 + I_2 + I_3 = G_{10} V_1 + G_{20} V_2 + G_{30} V_3 - (G_{10} + G_{20} + G_{30}) V_0,$$

waaruit volgt

$$V_0 = \frac{G_{10} V_1 + G_{20} V_2 + G_{30} V_3}{G_{10} + G_{20} + G_{30}},$$

en

$$I_1 = \frac{(G_{20} + G_{30}) V_1 - G_{20} V_2 - G_{30} V_3}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} G_{10}$$

$$I_2 = \frac{-G_{10} V_1 + (G_{30} + G_{10}) V_2 - G_{30} V_3}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} G_{20}$$

$$I_3 = \frac{-G_{10} V_1 - G_{20} V_2 + (G_{10} + G_{20}) V_3}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} G_{30} .$$

Voor fig. 34b geldt

$$I_1 = (G_{12} + G_{31}) V_1 - G_{12} V_2 - G_{31} V_3$$

$$I_2 = -G_{12} V_1 + (G_{12} + G_{23}) V_2 - G_{23} V_3$$

$$I_3 = -G_{31} V_1 - G_{23} V_2 + (G_{31} + G_{23}) V_3 .$$

Deze twee stelsels vergelijkingen worden identiek indien wij stellen

$$G_{12} = \frac{G_{10} G_{20}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}}$$

$$G_{23} = \frac{G_{20} G_{30}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}}$$

$$G_{31} = \frac{G_{10} G_{30}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} .$$

Met andere woorden, indien aan deze voorwaarden voldaan wordt, zijn de twee netwerken van fig. 34 equivalent t.a.v. de stromen en spanningen van de klemmen 1, 2, 3.

Deze relaties kunnen ook worden geschreven in de vormen

$$R_{12} = \frac{R_{20} R_{30} + R_{30} R_{10} + R_{10} R_{20}}{R_{30}} = R_{20} + R_{10} + \frac{R_{10} R_{20}}{R_{30}} ,$$

$$G_{12} = \frac{R_{30}}{R_{20} R_{30} + R_{30} R_{10} + R_{10} R_{20}} ,$$

enz. die de componenten van de driehoekschakeling in de componenten van de sterschakeling uitdrukken.

Het is evident, dat indien men één van de betrekkingen (2.5.1) kent, de andere betrekkingen volgen door cyclische verwisseling van de indices. Deze relaties worden ook als de ster-driehoektransformatie aangeduid.

2.4.2. Transformatie van de driehoek naar de ster-schakeling

De omgekeerde transformatie kan door directe omvorming van vergelijkingen (2.5.1.) of op de volgende wijze worden bepaald.

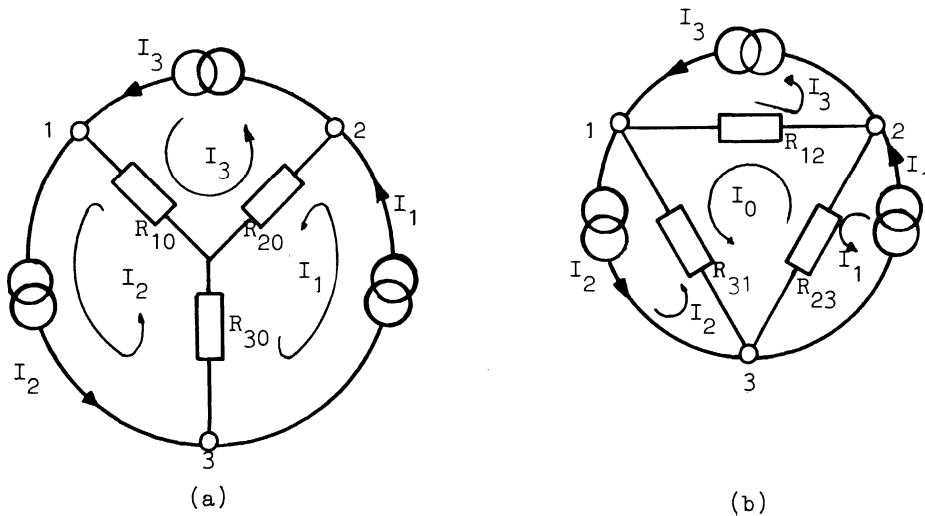


Fig. 35

In fig. 35 worden aan beide netwerken drie stroombronnen verbonden die tezamen met de weerstanden netwerken van 3 (fig. 35a) en 4 (fig. 35b) mazen vormen.

Voor fig. 35b gelden de vergelijkingen

$$U_{31} = R_{31} (I_2 - I_0), \quad U_{12} = R_{12} (I_3 - I_0), \quad U_{23} = R_{23} (I_1 - I_0).$$

De spanningswet van Kirchhoff toegepast op de inwendige maa's leidt tot

$$0 = U_{31} + U_{12} + U_{23} = R_{31} I_2 + R_{12} I_3 + R_{23} I_1 - (R_{23} + R_{31} + R_{12}) I_0 ,$$

waaruit volgt

$$I_0 = \frac{R_{23} I_1 + R_{31} I_2 + R_{12} I_3}{R_{23} + R_{31} + R_{12}} ,$$

en

$$U_{23} = R_{23} \frac{(R_{31} + R_{12}) I_1 - R_{31} I_2 - R_{12} I_3}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}$$

$$U_{31} = R_{31} \frac{-R_{23} I_1 + (R_{23} + R_{12}) I_2 - R_{12} I_3}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}$$

$$U_{12} = R_{12} \frac{-R_{23} I_1 - R_{31} I_2 + (R_{23} + R_{31}) I_3}{R_{23} + R_{31} + R_{12}} .$$

Voor fig. 35 geldt

$$U_{23} = (R_{20} + R_{30}) I_1 - R_{30} I_2 - R_{20} I_3$$

$$U_{31} = -R_{30} I_1 + (R_{30} + R_{10}) I_2 - R_{10} I_3$$

$$U_{12} = -R_{20} I_1 - R_{10} I_2 + (R_{10} + R_{20}) I_3 .$$

Deze twee stelsels vergelijkingen worden identiek indien wij stellen

$$R_{10} = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}$$

$$R_{20} = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{23} + R_{31} + R_{12}}$$

$$R_{30} = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{23} + R_{31} + R_{12}} ,$$

welke de formules van de driehoek-stertransformatie zijn.

Andere vormen zijn

$$G_{10} = G_{12} + G_{31} + \frac{G_{12} G_{31}}{G_{23}}$$

$$R_{10} = \frac{G_{23}}{G_{12} G_{31} + G_{23} G_{12} + G_{23} G_{31}} \text{ enz.}$$

Deze transformaties lenen zich als hulpmiddel voor de berekening van netwerken.

2.4.3.

Voorbeeld:

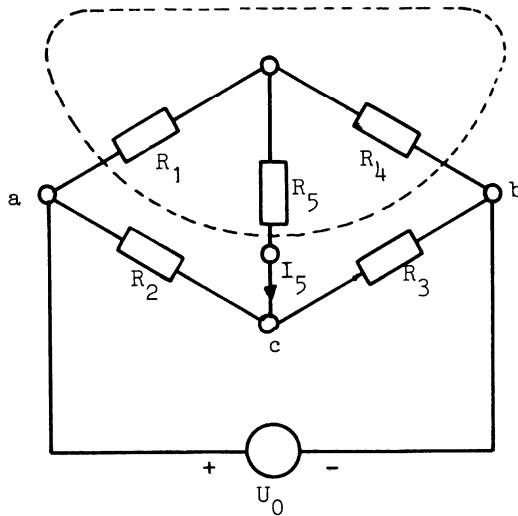


Fig. 36

Gevraagd: bereken I_5 .

Door een transformatie van de binnen de stippellijn liggende sterschakeling in een driehoek wordt fig. 37 verkregen.

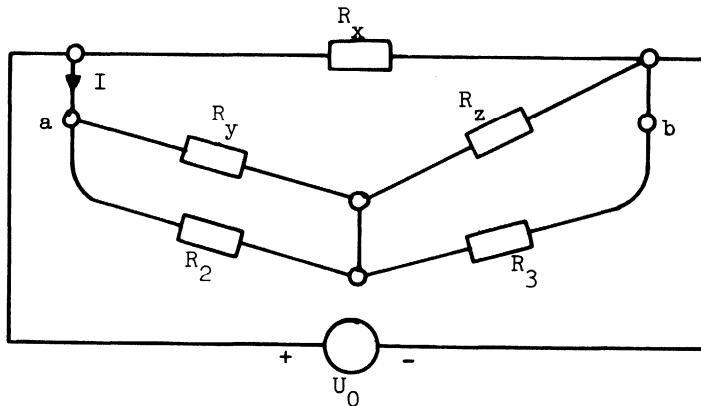


Fig. 37

waarin $R_y = R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_4}$, $R_z = R_4 + R_5 + \frac{R_4 R_5}{R_1}$.

Dit is hetzelfde probleem als dat van fig. 32.

Het resultaat is

$$I = \frac{(G_y + G_2)(G_z + G_3)}{G_2 + G_3 + G_y + G_z} U_0.$$

$$I_5 = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_5 (R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4 (R_2 + R_3) + R_2 R_3 (R_1 + R_4)} U_0.$$

Opgave: Controleer de juistheid van deze uitdrukking voor I_5 .

3. WISSELSTROMEN EN WISSELSPANNINGEN IN NETWERKEN

3.1. Tijdafhankelijke grootheden

In het voorgaande hebben wij stilzwijgend aangenomen dat alle stromen en spanningen constant waren. Wij hebben in dit verband steeds de notatie U, I voor spanning en stroom gebruikt. Wij zullen nu veronderstellen dat deze grootheden met de tijd variëren, en schrijven $u(t)$ en $i(t)$ in plaats van U en I . Wanneer er geen verwarring kan ontstaan laten wij de t weg en schrijven eenvoudig u, i . Dit is een algemene regel die in vele onderdelen van de fysica kan worden toegepast, namelijk constante grootheden worden met hoofdletters en van de tijd afhankelijke grootheden worden met kleine letters aangeduid.

3.2. Tekenafspraken

Bij het rekenen met van de tijd afhankelijke grootheden, moeten wij steeds aan de tekenafspraken van § 1.5.2. denken. Wij wijzen steeds een positieve stroomrichting en positieve polariteit aan, zelfs als de stroom of spanning van richting of polariteit in de loop van de tijd verandert. Vloeit er in fig. 2 op tijdstip t_1 een stroom in de richting van de pijl, dan is $i(t_1)$ positief; in het tegenovergestelde geval is $i(t_1)$ negatief. Het kan zijn dat op een ander tijdstip t_2 de stroom tegen de pijlrichting vloeit zodat $i(t_2)$ negatief is. Deze richtingsverandering wordt dan weerspiegeld in de tekenverandering van de functie $i(t)$ als t varieert. Op dezelfde wijze is de spanning $u(t_1)$ positief wanneer in fig. 4 de potentiaal van punt A hoger is dan die van punt B op het tijdstip t_1 .

De symbolen voor de spannings- en stroombron met hun bijbehorende pijlen en plus- en mintekens blijven onveranderd.

3.3. De wetten van Kirchhoff

De wetten van Kirchhoff en het verband tussen stroom en spanning gelden voor elk tijdstip, zodat, in overeenstemming met § I.8,

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad , \quad \sum_{l=1}^m u_l(t) = 0.$$

Bovendien geldt de wet van Ohm voor elk tijdstip:

$$u(t) = R i(t) \quad \text{of} \quad i(t) = G u(t).$$

Dit betekent dat alle resultaten die uit deze wetten volgen, zoals methoden voor netwerkberekeningen, superpositie, de theorema's van Tellegen, Thévenin, Norton, de wet van behoud van vermogen en het reciprociteitstheorema hun geldigheid behouden wanneer U , I door u , respectievelijk i worden vervangen. Hierbij moeten wij bedenken dat bij de toepassing van de wetten, alle beschouwingen betrekking hebben op stromen en spanningen op hetzelfde tijdstip. Men lette goed op dat de weerstanden en geleidingen steeds onafhankelijk van de tijd zijn.

3.4. Sinusvormige grootheden

Wij zullen in het vervolg veel aandacht besteden aan stromen en spanningen die sinusvormig met de tijd veranderen, welke van primaire betekenis voor de elektrotechniek zijn. Hiermede wordt bedoeld grootheden *) van de functionele vorm $I \sin(\omega t + \phi)$. Deze functie kan op twee zeer bruikbare wijzen meetkundig worden afgebeeld (fig. 38). In fig. 38a wordt de waarde van de functie op een gegeven tijdstip gegeven door de projectie op de vertikale as van een punt dat met constante snelheid, tegen de klok in, een cirkel met straal I beschrijft. De voerstraal die het middelpunt van de cirkel met dit bewegende punt verbindt, beweegt zich dan met een hoeksnelheid ω rad/s in de positieve draairichting. De omlooptijd voor een omwenteling is dan $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s. Een projectie van het bewegende punt op de horizontale as levert de functie $I \cos(\omega t + \phi)$ op, welke een functie van hetzelfde type is. In fig. 38b wordt de sinusfunctie in grafiek uitgezet. In de elektrotechniek en de trillingsleer hebben wij speciale namen voor de zojuist ingevoerde grootheden. Wij noemen T de periode van de functie en ω de hoekfrequentie. De parameter I heet de amplitude. De hoek $\omega t + \phi$ heet de fasehoek; in het algemeen is ψ de fasehoek van een functie $\sin \psi$. De hoek ϕ is de fasehoek op het tijdstip $t=0$. Deze hoek kan worden genoemd de referentie-fasehoek, daar hierdoor de

*) In de literatuur komen de symbolen \hat{I} en I_m in plaats van I dikwijls voor. Wij geven de voorkeur aan een zo eenvoudig mogelijk symbool.

tijdsprong t.o.v. de functie wordt bepaald.

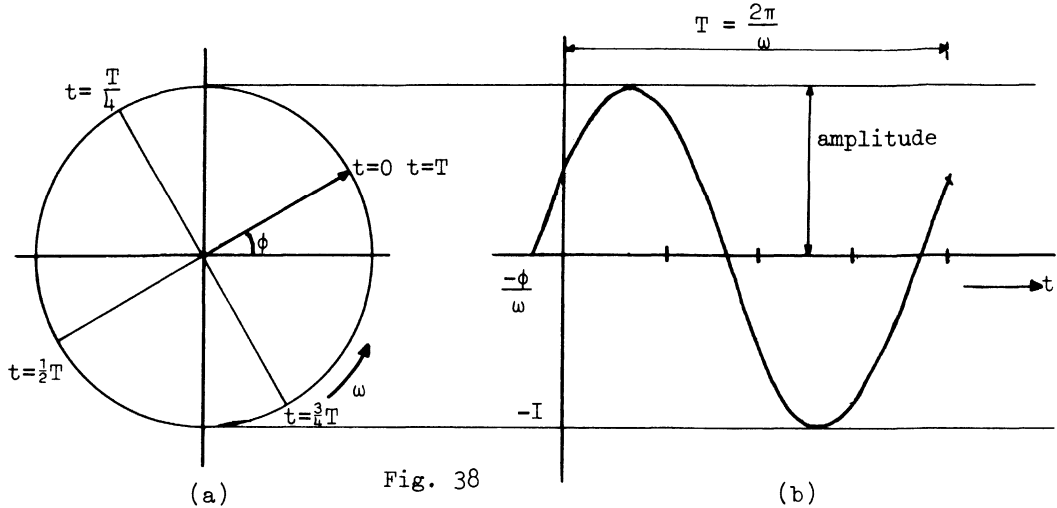


Fig. 38

Daar $\sin(\omega t + \phi + 2n\pi) = \sin(\omega t + \phi)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, kan er enige dubbelzinnigheid bij de keuze van ϕ optreden. Derhalve spreken wij af dat ϕ zodanig gekozen wordt dat $-\pi < \phi \leq \pi$.

Een andere belangrijke parameter is de frequentie $f = \frac{1}{T}$. De frequentie is gelijk aan het aantal omwentelingen per seconde van de voerstraal of het aantal cycli per seconde van de functie, d.w.z. het aantal maal per seconde dat de functie "zich herhaalt". De eenheid van de frequentie is hertz (Hz) en de eenheid van de hoekfrequentie is radiaal per seconde (rad/s). Dus uit de fundamentele relaties

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f},$$

volgt dat $1 \text{ Hz} = 2\pi \text{ rad/s}$.

Hebben wij te maken met twee sinusvormige grootheden van dezelfde frequentie, $i_1(t) = I_1 \sin(\omega t + \phi_1)$ en $i_2(t) = I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$, dan zeggen wij dat i_1 in fase voor is t.o.v. i_2 , of i_2 is in fase achter t.o.v. i_1 , wanneer $\phi_1 > \phi_2$. Er kan zich echter een wat kunstmatige situatie voordoen tenzij wij onze definities aanpassen. Is bijvoorbeeld $\phi_1 = 0,9\pi$ rad en $\phi_2 = -0,9\pi$ rad, dan zouden wij zeggen dat i_1 $1,8\pi$ rad in fase voor is t.o.v. i_2 . Maar $i_1 = I_1 \sin(\omega t + 0,9\pi) = I_1 \sin(\omega t - 1,1\pi)$, zodat wij even goed kunnen zeggen dat i_1 $0,2\pi$ rad in fase achter is t.o.v. i_2 .

Wij spreken af dat wanneer $|\phi_1 - \phi_2| > \pi$, de grootheid $\phi_1 - \phi_2 + 2n\pi$ wordt berekend, waarbij $n = +1$ wanneer $\phi_1 - \phi_2 < 0$ en $n = -1$ wanneer $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Hierdoor wordt een zodanige fasehoek verkregen dat $|\phi_1 - \phi_2 + 2n\pi| < \pi$. Wanneer deze hoek positief is, zeggen wij dat i_1 in fase voor is t.o.v. i_2 . Wij noemen dan $\phi_1 - \phi_2 + 2n\pi$ het faseverschil tussen i_1 en i_2 , waarbij

$$n = 1 \text{ indien } \phi_1 - \phi_2 < -\pi$$

$$n = -1 \text{ indien } \phi_1 - \phi_2 > \pi$$

$$n = 0 \text{ indien } |\phi_1 - \phi_2| < \pi.$$

In het speciale geval dat $I_1 = I_2$, betekent het voorgaande dat het verschijnsel i_2 een kopie van het verschijnsel i_1 is maar verschoven naar latere tijdstippen. Immers is

$$i_2 = I_2 \sin \left\{ \omega \left[t - \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{\omega} \right) \right] + \phi_1 \right\} = i_1(t - \tau),$$

waarin $\tau = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\omega}$. Een bepaald punt op de kromme $i_1(t)$ heeft dezelfde ordinaat $i_1(t_1)$ - met abscis t_1 - als een punt op de kromme $i_1(t - \tau)$ wanneer $t_1 = t - \tau$; d.w.z. $t = t_1 + \tau$ is de abscis van $i_1(t - \tau) = i_2(t)$ die aan t_1 correspondeert. Dus wordt de kromme $i_2(t)$ uit $i_1(t)$ verkregen wanneer $i_1(t)$ een afstand τ naar rechts wordt verschoven. Het verschijnsel $i_2(t)$ gaat gepaard met grotere waarden van de variabele t , dus geschiedt later in de tijd. M.a.w. $i_2(t)$ is een kopie van $i_1(t)$ verschoven naar latere tijdstippen. Bij het kiezen van het punt $i_1(t_1)$ is het in de regel het gemakkelijkst een maximum of een minimum te nemen.

3.5. Twee sinusfuncties met gelijke frequentie

In fig. 39 zijn aangegeven twee sinusvormige grootheden van verschillende amplitude, doch met gelijke frequentie.

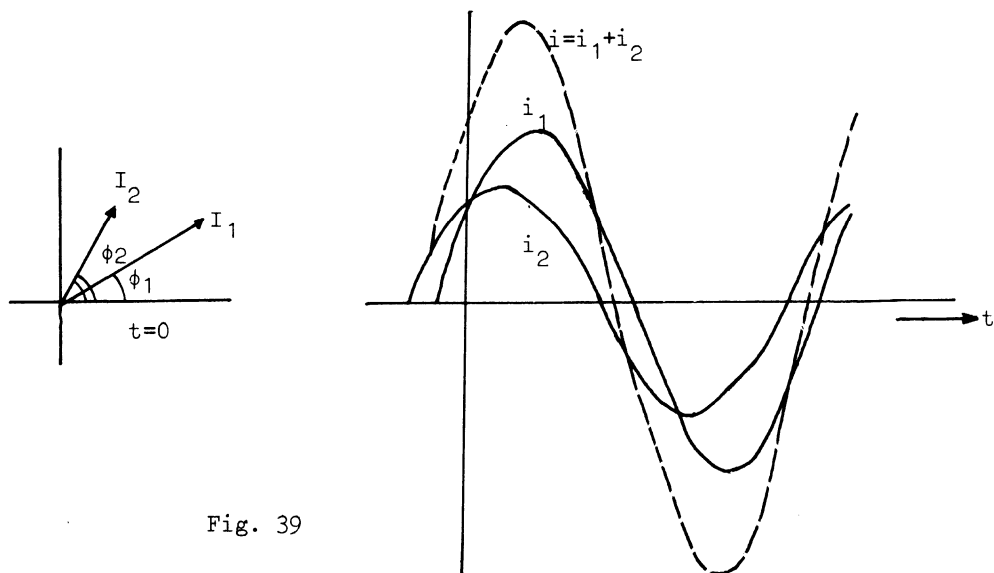


Fig. 39

Vraag: Is $i_1(t)$ in fase voor of achter t.o.v. $i_2(t)$?

Geef de abscissen aan waarbij i_1 en i_2 nul zijn.

Wij zullen nu aantonen dat de som van twee sinusfuncties van dezelfde frequentie een sinusfunctie van deze frequentie is:

$$\begin{aligned}
 i_1 + i_2 &= I_1 \sin(\omega t + \phi_1) + I_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\
 &= \left[\bar{I}_1 \cos \phi_1 + I_2 \cos \phi_2 \right] \sin \omega t + \\
 &\quad + \left[\bar{I}_1 \sin \phi_1 + I_2 \sin \phi_2 \right] \cos \omega t.
 \end{aligned}$$

Deze formule is van de vorm $A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t \right]$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \epsilon),$$

waarin $\cos \epsilon = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \epsilon = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

zodat de som inderdaad een sinusfunctie met hoekfrequentie ω is.

Opgave: Toon aan dat de amplitude en referentie-fasehoek van deze functie

zijn $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$ respectievelijk

$$\varepsilon = \arctan \left[\frac{I_1 \sin \phi_1 + I_2 \sin \phi_2}{I_1 \cos \phi_1 + I_2 \cos \phi_2} \right].$$

Het blijkt nu dat als wij de voerstralen volgens fig. 38a, die bij de grootheden i_1 en i_2 behoren, op het tijdstip $t = 0$ afbeelden, de voerstraal van $i_1 + i_2$ op hetzelfde tijdstip wordt verkregen door de voerstralen I_1 en I_2 als vectoren op te tellen (fig. 40).

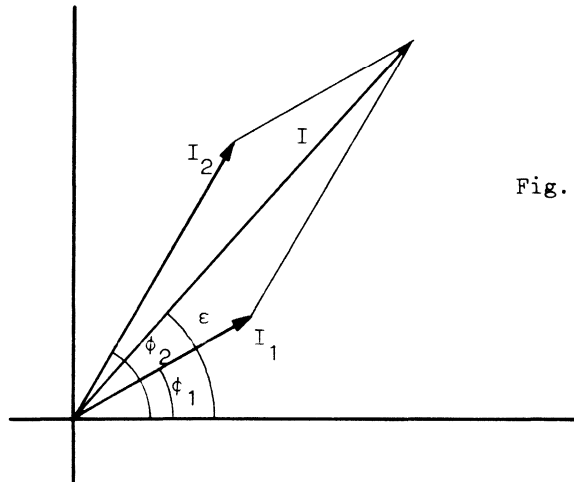


Fig. 40

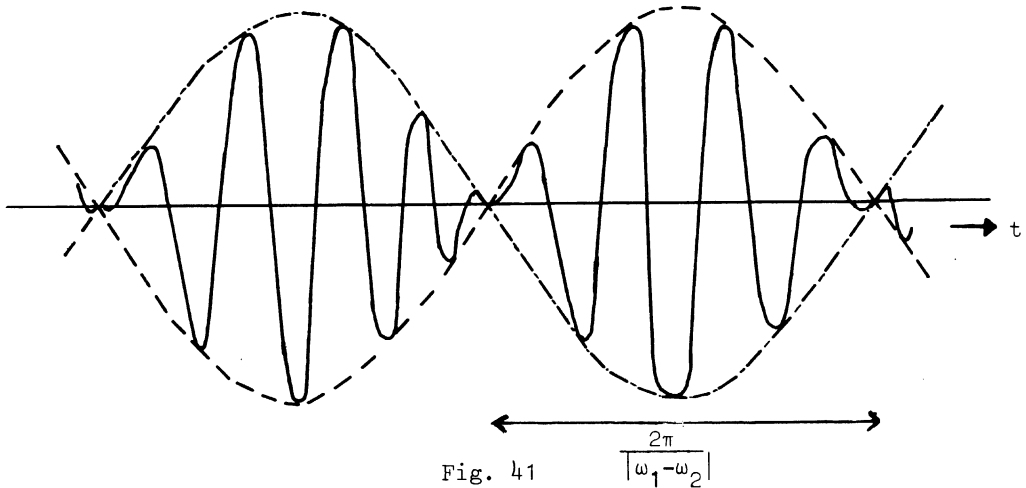
Opgave: Toon goniometrisch de juistheid van deze bewering aan.

3.6. Twee sinusfuncties met ongelijke frequentie

De som van twee sinusvormige grootheden van ongelijke frequentie is echter niet sinusvormig. Nemen wij bijvoorbeeld twee sinusvormige grootheden $i_1 = \sin(\omega_1 t + \phi_1)$, $i_2 = \sin(\omega_2 t + \phi_2)$, dan is

$$i_1 + i_2 = 2 \sin \left\{ \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] \right\} \cos \left\{ \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \right\}$$

Wij kunnen deze grootte beschouwen als sinusvormig met hoekfrequentie $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ en met een "sinusvormige amplitude" $2 \cos \left\{ \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \right\}$ waarvan de hoekfrequentie $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ is (fig. 41).



Opmerking: Als twee stemvorken trillen met frequenties die weinig van elkaar verschillen, dan kan men een "zwevende" toon horen; d.w.z. de "amplitude" van het geluid gaat op en neer met een frequentie gelijk aan de verschilfrequentie van de trillingen van de stemvorken. De intensiteit van het geluid, die in nauw verband met het vermogen staat, varieert eveneens met de verschilfrequentie. Dit is echter een ingewikkelder verschijnsel dan in fig.41 is afgebeeld daar de amplituden in het algemeen niet gelijk zijn.

3.7. Gemiddelde waarden

Alle sinusvormige grootheden, of lineaire combinaties hiervan, zijn voorbeelden van wisselgrootheden. Wij spreken dus van wisselstromen en wisselspanningen. In het algemeen is een wisselgrootte een periodieke grootte waarvan de gemiddelde waarde over een periode nul is. Een periodieke grootte is een grootte die verandert volgens een periodieke functie van de tijd; een periodieke functie voldoet aan de relatie $f(t) \equiv f(t + T)$, waarin T de periode is. Een periodieke functie "herhaalt zich" op tijdstippen $T, 2T, 3T, \dots$, later dan het huidige. De gemiddelde waarde van een functie over een interval (a, b) wordt gegeven door

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \quad , \text{ waarin de symbolen } \langle \rangle$$

het gemiddelde van een functie aanduiden.

- Opgaven: 1. Bewijs dat de gemiddelde waarde van een sinusfunctie over een periode nul is (interval: (t_0, t_0+T)).
2. Is de functie $\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ periodiek? Zo ja, wat is de periode?
3. Bewijs dat een lineaire combinatie van twee sinusfuncties periodiek is en dat de gemiddelde waarde over een periode nul is.
4. Bewijs met behulp van volledige inductie dat een lineaire combinatie van n sinusfuncties een periodieke functie is en dat de gemiddelde waarde over een periode nul is.

Wij zullen ons voorlopig beperken tot sinusvormig veranderende grootheden van dezelfde frequentie. In een later stadium zullen wij te maken hebben met sinusvormige grootheden van verschillende frequentie. De problemen die dan aan de orde komen kunnen worden herleid tot de hier te behandelen problemen met behulp van het superpositiebeginsel.

3.8. Vermogen

3.8.1.

In § I.2 hebben wij het vermogen gedefinieerd als de hoeveelheid verrichte arbeid per tijdseenheid. Deze definitie is algemeen geldig, zodat

$$p(t) = u(t) i(t).$$

Om te benadrukken dat het vermogen in het algemeen afhankelijk van de tijd is, noemen wij $p(t)$ het momentele vermogen. Worden de positieve stroomrichting en de positieve spanningspolariteit gekozen volgens fig. 42, dan is $p(t)$ positief wanneer het netwerk vermogen opneemt of de bron vermogen afgeeft.

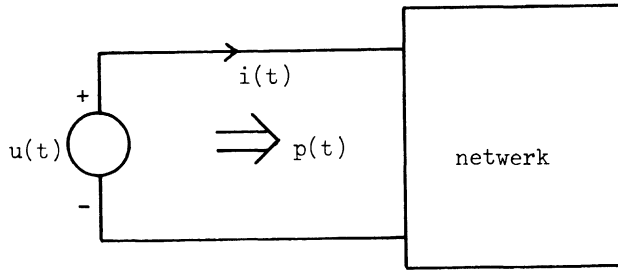


Fig. 42

3.8.2. Gemiddeld vermogen

Bestaat het netwerk van fig. 42 uit een enkele weerstand, dan is het opgenomen vermogen

$$p(t) = R \{i(t)\}^2 = G \{u(t)\}^2 \geq 0.$$

De laatste ongelijkheid drukt uit het feit dat het in een weerstand gedissipeerde vermogen nooit negatief kan zijn. Warmtetechnisch gezien is het omzetten van elektrische energie in warmte een niet omkeerbaar proces, wat tot uitdrukking komt in de relatie $p(t) \geq 0$.

In het geval van een sinusvormige stroom - bijvoorbeeld als $i(t) = I \sin(\omega t + \phi)$ - dan is

$$p(t) = RI^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} RI^2 (1 - \cos\{2(\omega t + \phi)\}).$$

Deze laatste uitdrukking kan worden geïnterpreteerd als een grootte die, zoals uit fig.43 blijkt, om de gemiddelde waarde $\frac{1}{2} RI^2$ met een hoekfrequentie 2ω oscilleert.

Het gemiddelde vermogen over één periode, $\frac{1}{2} RI^2$, is een belangrijke parameter en wordt met een hoofdletter P aangeduid. Men lette op het verschil met het vermogen bij constante stromen (wat ook een gemiddeld vermogen is).

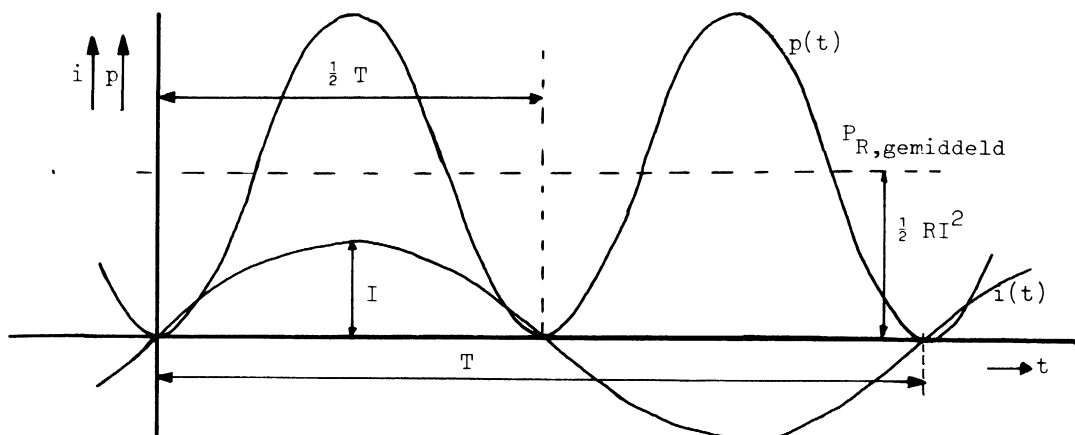


Fig. 43

Opgave: Bewijs als gevolg van de definitie van het gemiddelde vermogen over één periode, namelijk $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$, dat het gemiddelde in een weerstand gedissipeerde vermogen gelijk is aan $\frac{1}{2} RI^2$.

3.8.3.

Het is direkt in te zien in fig. 43 dat het gemiddelde vermogen over een periode gelijk is aan het gemiddelde vermogen over een oneindig lange tijd. Wij zullen nu aantonen dat dit resultaat algemeen geldig is voor alle sinusvormige stromen en spanningen van dezelfde frequentie, dus niet alleen voor het in een weerstand gedissipeerde vermogen.

Stel $u(t) = U \sin(\omega t + \phi_1)$, $i(t) = I \sin(\omega t + \phi_2)$.

Dan is

$$\begin{aligned}
 \langle p(t) \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u(t) i(t) dt & (3.8.1.) \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \{UI \sin(\omega t + \phi_1) \sin(\omega t + \phi_2)\} dt \\
 &= \frac{UI}{2\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \{\cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)\} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{UI}{2} \cos (\phi_1 - \phi_2) - \frac{UI}{4\omega\tau} \sin \{2\omega (t_0 + \tau) + \phi_1 + \phi_2\} \\
&\quad + \frac{UI}{4\omega\tau} \sin (2\omega t_0 + \phi_1 + \phi_2). \qquad (3.8.2.)
\end{aligned}$$

Maar de sinusfunctie is een begrensde functie - d.w.z. in dit geval is $|\sin \psi| \leq 1$ - terwijl als $\tau \rightarrow \infty$, nadert $\frac{UI}{4\omega\tau}$ naar nul. Derhalve is $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} UI \cos (\phi_1 - \phi_2)$, onafhankelijk van t_0 . Waar het om gaat is dat het interval waarover er gemiddeld wordt oneindig breed wordt; het kan zijn dat t_0 eindig blijft of naar $-\infty$ nadert of dat $t_0 + \tau$ naar $+\infty$ nadert of eindig blijft.

Aan de andere kant, indien $\tau = T$ is, dan zijn de twee sinustermen in $\langle p(t) \rangle$ gelijk in grootte maar met verschillende voortekens. Derhalve is

$$\langle p(t) \rangle_{\tau=T} = P = \frac{1}{2} UI \cos (\phi_1 - \phi_2) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle p(t) \rangle.$$

Wij zullen in latere paragrafen op dit vrij algemene resultaat terugkomen. Belangrijk in dit stadium is het feit dat het gemiddelde over één periode eenvoudiger te berekenen is dan het gemiddelde over een oneindig lange tijd. In het geval van een weerstand bestaat er uiteraard geen faseverschil tussen de spanning en stroom zodat $\phi_1 = \phi_2$ en $P = \frac{1}{2} UI = \frac{1}{2} RI^2$.

3.8.4.

Wanneer de stroom en spanning constant in de tijd zijn, spreken wij van een gelijkstroom en een gelijkspanning. Hiermede wordt bedoeld dat niet alleen de richting of polariteit onveranderd in de tijd blijven maar ook de sterkte. Het vermogen bedraagt dan UI , welk ook gelijk is aan het gemiddelde vermogen over een willekeurig tijdsinterval, zoals direkt uit verg. (3.8.1.) volgt.

Wij kunnen onder enige beperkingen een gelijkstroom opvatten als een wisselstroom waarvan de periode naar het oneindige nadert. Immers is

$$\lim_{T \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} i(t), \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} I \sin (\omega t + \phi) = I \sin \phi,$$

mits t eindig blijft. Wij kunnen echter in dit geval niet zonder meer

verg. 3.8.2 gebruiken om het gemiddelde vermogen over een periode te berekenen, daar als $\tau \rightarrow \infty$, de variabele t in de sinusfunctie waarden moet aannemen die naar het oneindige naderen, wat in strijd is met wat wij hierboven hebben gesteld. In feite volgt de moeilijkheid uit het feit dat wij met een dubbele limietovergang te maken hebben, namelijk $\omega \rightarrow \infty$ en $\tau \rightarrow \infty$, - zoals uit de wiskunde bekend is - zodat de uitkomst afhankelijk is van de wijze waarop deze twee grootheden naar het oneindige naderen. Hierin ligt ook de verklaring voor een coëfficiënt van UI , die anders dan 1 is, in de uitdrukking voor het gemiddelde vermogen bij wisselstromen.

3.8.5. Effectieve grootheden

Teneinde met formules te kunnen werken die zo weinig mogelijk verschillen van de formules voor gelijkstromen en spanningen worden nieuwe grootheden I_{eff} en U_{eff} ingevoerd welke de effectieve waarden van de sinusvormige grootheden heten.* Deze grootheden worden zodanig gekozen dat het in een weerstand gedissipeerde vermogen gelijk is aan

$$U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}^2 = GU_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} UI = \frac{1}{2} RI^2 = \frac{1}{2} GU^2.$$

Hieruit volgt dat $I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I$, $U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U$.

De meeste meetinstrumenten voor wisselstromen en spanningen zijn geijkt voor effectieve waarden. Ook in het gewone spraakgebruik bedoelt men een effectieve waarde als men over een spanning of stroomsterkte spreekt. Bijvoorbeeld, de netspanning in Europa bedraagt 220 V. Dit is een effectieve waarde zodat de amplitude van deze wisselspanning (met frequentie 50 Hz) gelijk is aan $220 \sqrt{2} \approx 311$ V. De spanningsverandering van de maximale naar de minimale waarde bedraagt $2 \times 311 = 622$ V. Deze waarde is van belang wanneer men de spanning bijvoorbeeld op een oscilloscoop wil tonen of meten. (Zie in dit verband de practicumhandleidingen.)

* In de literatuur komen de symbolen I , U voor de effectieve waarden en I_m , \hat{I} , U_m , \hat{U} voor de amplituden vaak voor. In dit college maken wij weinig gebruik van de effectieve waarden. Wij gaan uit van het principe: kies de meest gebruikte symbolen zo eenvoudig mogelijk.

Vraag: Wat is een eenvoudige uitdrukking voor

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} I^2 \sin^2 (\omega t + \phi) dt \quad ?$$

3.8.6. De decibel-schaal

In de communicatietechniek en de instrumentatietechniek wordt vaak gebruik gemaakt van een heel andere schaal om het vermogensniveau uit te drukken. Eén bepaald vermogen in een vast apparaat of gedefinieerd volgens bepaalde voorschriften wordt als referentie gekozen en het logaritme van de verhouding van het vermogen in alle andere situaties tot dit referentievermogen wordt bepaald. Zodoende wordt een grootte $\log_{10} \frac{p}{p_0}$ verkregen waarin p het te meten of te onderzoeken vermogen is en p_0 het referentievermogen. Deze grootte wordt in bel (B) uitgedrukt. In de praktijk echter wordt een eenheid die tien maal zo klein is gebruikt, welke de decibel (dB) heet. Het vermogen uitgedrukt in decibel: $10 \log_{10} \frac{p}{p_0}$.

Voorbeeld: Nemen wij als referentie het vermogen dat door een stroom van 1 A in een weerstand van 1 Ω wordt gedissipeerd, dan komt een stroom van $\sqrt{2}$ A overeen met het dubbele vermogen. Het aantal decibel is dan $3,01 \approx 3$. Zeer vaak gebruikt men een referentie van 1 mW. In dat geval wordt, zoals in alle andere gevallen, de verhouding aangegeven als zoveel dB maar wordt het absolute vermogen aangegeven als zoveel dBm.

Voorbeeld: $10 \log_{10} \frac{1 \text{ W}}{1 \text{ mW}} = 10 \log_{10} 1000 = 30$. Dus is 1 W = 30 dBm.

3.9. De condensator en de spoel

Wij hebben tot dusverre steeds gewerkt met twee soorten elementen, namelijk de weerstand en de energiebronnen. In de weerstand wordt elektrische energie omgezet in warmte (het omgekeerde is niet mogelijk) terwijl de bronnen elektrische energie óf afgeven óf opnemen door omzetting vanuit of in een andere dan elektrische energie. Wij zullen nu twee andere elementen invoeren die de eigenschap hebben dat zij elektrische energie kunnen opbergen of afleveren zonder dat er omzetting in warmte, chemische

of mechanische energie plaatsvindt. Deze elementen heten de ideale condensator en de ideale spoel. In de netwerktheorie is het gebruikelijk het woord ideaal weg te laten daar wij uitsluitend met geïdealiseerde vormen van fysische apparaten werken. Gezamenlijk heten de condensator en de spoel reactieve elementen.

3.9.1. De condensator

Fysisch gezien bestaat een condensator uit twee geleidende platen die dicht bij elkaar geplaatst zijn, gescheiden door een niet geleidend materiaal (of vacuüm) dat een diëlektricum heet. Op de ene plaat bevindt zich een positieve lading en op de andere plaat een gelijke hoeveelheid negatieve lading. Hierdoor ontstaat er een elektrisch veld tussen de platen zodat een positief geladen deeltje dat zich tussen de plaat zou bevinden door de positief geladen plaat afgestoten en door de negatief geladen platen aangetrokken wordt. Er bestaat derhalve een spanning tussen de platen welke - zoals in de elektriciteitsleer wordt aangetoond - evenredig aan de grootte van de lading op de platen is. Wij schrijven $q = Cu$, waarin C de capaciteit heet. De capaciteit wordt uitgedrukt in farad (F) en is een constante mits de eigenschappen van het diëlektrisch materiaal en de meetkundige verhoudingen van het apparaat constant blijven.

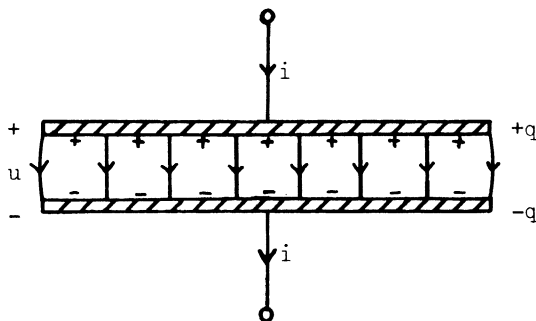


Fig. 44

Teneinde met algebraïsche symbolen te kunnen rekenen moeten wij bepaalde tekenafspraken maken. Wij kennen een positieve polariteit aan de lading toe zodanig dat wanneer de lading op één van de (van te voren afgesproken) platen positief is, q positief wordt gerekend en negatief in het tegenovergestelde geval. Als wij nu de positieve spanningspolariteit zodanig kiezen dat u positief wordt gerekend wanneer q positief wordt gerekend, dan is C een positieve constante. Dit is de afspraak welke wij in bijna elke situatie zouden maken. Het is echter geen logische noodzaak.

Wanneer in de toevoerdraden een stroom toevloeit naar de ene plaat en een gelijke stroom afvloeit van de andere plaat dan verandert de lading q , maar wel zodanig dat de hoeveelheid positieve lading op de ene plaat gelijk blijft aan de hoeveelheid negatieve lading op de andere plaat. Als wij nu de positieve stroomrichting zodanig kiezen, dat wanneer de stroom in deze richting vloeit de lading op de bij de polariteitsafpraak voor lading als positief afgesproken plaat meer positief wordt, dan geldt

$$i = \frac{dq}{dt} .$$

In bijna alle situaties maken wij deze afspraak; het is echter geen logische noodzaak. Onder de voorwaarden van de gemaakte tekenafspraken kunnen wij nu schrijven

$$i = C \frac{du}{dt} \quad \text{of} \quad u = \frac{1}{C} \int idt , \quad \text{met } C > 0. \quad (3.9.1.)$$

Het is van belang zich te realiseren dat het feit dat C positief is een consequentie is van het verband tussen lading en potentiaal (zoals in de colleges "elektriciteit" wordt behandeld) en de tekenafspraken die wij hier gemaakt hebben. Andere afspraken kunnen leiden tot een negatieve C ; de relaties (3.9.1) echter zijn bijna de enige die gebruikt worden.

Van het netwerktheoretische standpunt bezien - waarbij alleen het berekenen van de stromen en spanningen in een netwerk opgebouwd uit ideale elementen van belang is en niet de fysische werking of constructie - kunnen wij verg. (3.9.1) te zamen met de in fig. 45 gemaakte afspraken als de definitie van de ideale condensator nemen. Hierin komt het begrip lading niet voor.

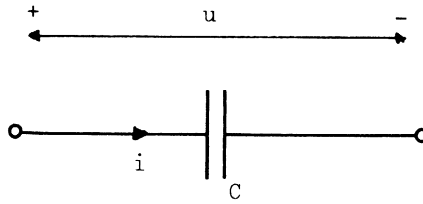


Fig. 45

3.9.1.1.

In de netwerktheorie behoeven wij niet verder te blijven stilstaan bij de definitie van dit element. Beschouwd als fysisch verschijnsel echter, kunnen wij ons afvragen waarom de hoeveelheden lading op de platen gelijk moeten zijn terwijl de tekens verschillend zijn. Het is inderdaad mogelijk de platen zo op te laden dat de ladingen op de platen niet gelijk en van tegengestelde polariteiten zijn. In zo'n geval moet er zich ergens lading op een of meer andere lichamen bevinden. (Het heelal is in zijn geheel elektrisch neutraal.) In dit geval zullen er veldlijnen van alle positieve naar alle negatieve ladingen lopen. Elke groep veldlijnen tussen twee geleiders zorgt voor de elektrische capaciteit tussen de geleiders, hetgeen door een ideale condensator, zoals boven is beschreven, kan worden vervangen (fig. 45).

Dan is uit de elektriciteitsleer bekend dat

$$q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + C_{14}(V_1 - V_4) + C_{10} V_1$$

$$q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) + C_{24}(V_2 - V_4) + C_{20} V_2 \quad \text{enz.}$$

waarin q_k de totale lading op geleidend lichaam k is en V_k de corresponderende potentiaal.

Deze vergelijkingen volgen uit algemene lineariteitsbeschouwingen. Met behulp van energie- en veldbeschouwingen wordt in de elektriciteitsleer verder aangetoond dat

$$C_{kl} = C_{lk} \geq 0, \quad C_{ko} = 0.$$

Het is op grond hiervan dat in de netwerktheorie alle elektrische verschijnselen die berusten op het verband tussen lading en potentiaal met behulp van een enkel soort element, de ideale condensator, kunnen worden beschreven.

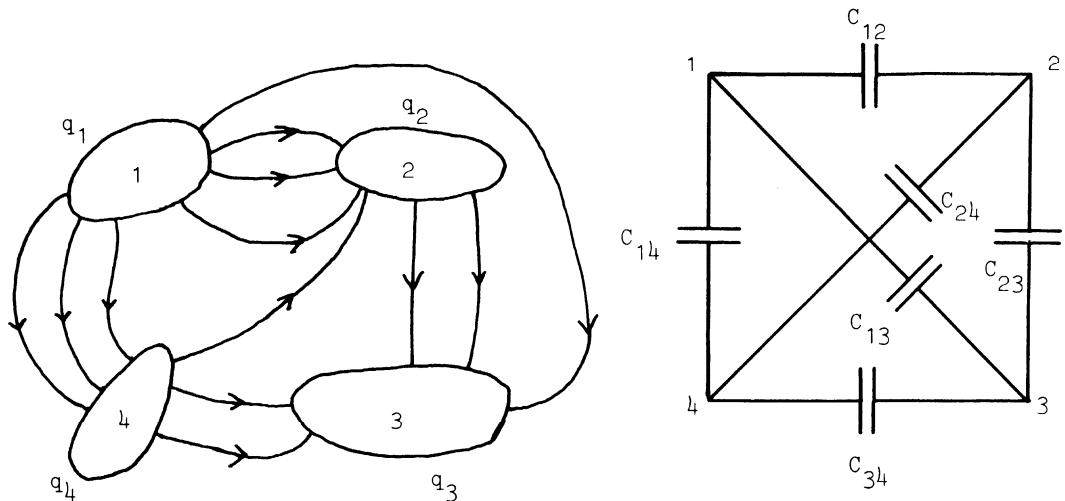


Fig. 46

3.9.2. De spoel

Fysisch gezien bestaat de spoel uit een materiële kern, welke in vele gevallen ferromagnetisch is, en welke met een goed geleidende draad gewikkeld is. Met een in de draad vloeiende stroom gaat er een magnetisch veld gepaard dat, in het geval van een gesloten ferromagnetische kern, geconcentreerd wordt in de kern (fig. 47a). Met het magnetisch veld gaat er een magnetische flux gepaard waarvan de sterkte afhangt van de geometrische configuratie, het magnetisch materiaal en de magnetische veldsterkte. In het geval van een lineair ferromagneticum is de flux ϕ evenredig aan de stroom. Als de spoel n wikkelingen heeft, schrijven wij $n \phi = L i$, waarin L de coëfficiënt van zelf-inductie, of kortweg de zelfinductie heet. De zelfinductie wordt uitgedrukt in henry (H) en is een constante, mits de eigenschappen van het magnetisch materiaal en de meetkundige verhoudingen van het apparaat constant blijven.

Teneinde met algebraïsche symbolen te kunnen rekenen moeten wij bepaalde tekenafspraken maken. Wij kennen een positieve richting

aan de flux toe, zodanig dat wanneer de flux (zoals deze in de elektriciteitsleer wordt gedefinieerd) deze richting heeft, ϕ positief wordt gerekend en negatief in het tegenovergestelde geval. Als wij nu de positieve stroomrichting zodanig kiezen dat i positief wordt gerekend wanneer ϕ positief wordt gerekend, dan is L een positieve constante. Dit is de afspraak welke wij in bijna elke situatie zouden maken; het is echter geen logische noodzaak.

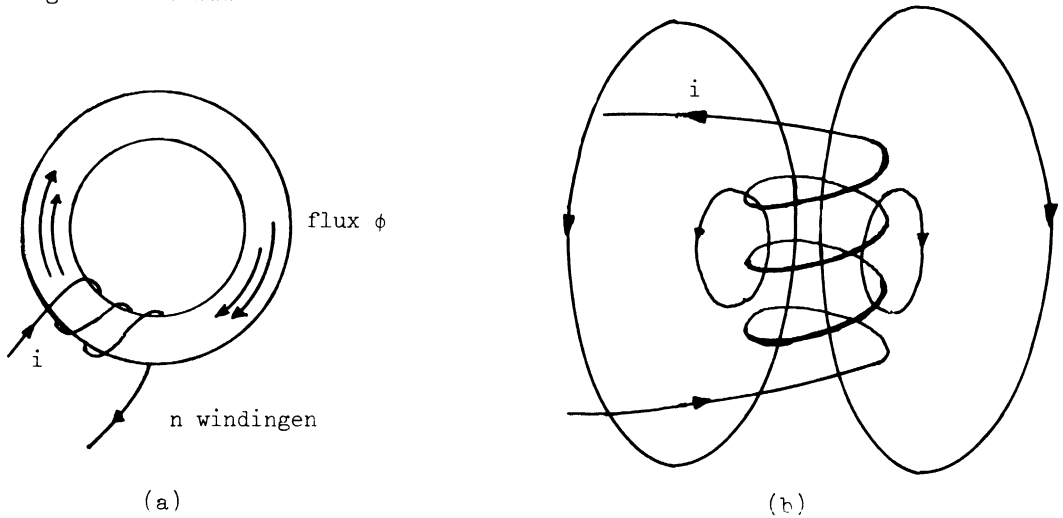


Fig. 47

Figuur 47a toont het verband tussen de positieve stroom- en fluxrichtingen aan (rechterhandsregel). Als de fluxsterkte verandert dan treedt er een elektrisch veld in de draad op dat zo gericht is dat het elektrisch veld links om de richting van de toenemende fluxvector gericht is (wetten van Lenz en Faraday). Dit elektrisch veld in de draad geeft aanleiding tot een spanning tussen de klemmen van de wikkeling, die een zodanige polariteit heeft dat het door de fluxverandering geïnduceerde elektrisch veld in de draad gericht is van de klem van lagere naar de klem van hogere potentiaal. De situatie is analoog aan die van de accu (§ I.1) waar, door de chemische werking van de accu, een elektrisch veld binnen de accu bestaat dat gericht is van de klem van lagere naar de klem van hogere potentiaal.

Wanneer de positieve spanningspolariteit zodanig wordt gekozen dat u positief is wanneer het door de fluxverandering geïnduceerde elektrisch

veld gericht is van de klem aangeduid met een minteken naar de klem aangeduid met een plusteken, dan is

$$u = \frac{d}{dt} (n \phi) ,$$

waarin $n \phi$ de totaal door de wikkeling omvatte flux is (wet van Faraday en Maxwell).

Onder de voorwaarden van de gemaakte tekenafspraken kunnen wij dan schrijven

$$u = L \frac{di}{dt} , \text{ of } i = \frac{1}{L} \int u dt \quad \text{met } L > 0 . \quad (3.9.2)$$

Het feit dat L positief is is een gevolg van de wet van Faraday en Maxwell en de tekenafspraken die wij hier gemaakt hebben. In de elektriciteitsleer werkt men vaak liever met de e.m.k. dan met de spanning. De e.m.k. is gelijk aan de lijnintegraal van de geïnduceerde veldsterkte en is dus in het onderhavige geval gelijk aan $-u$.

Van het netwerktheoretische standpunt bezien kunnen wij verg. (3.9.2) te zamen met de in figuur 48 gemaakte tekenafspraken als definitie van de ideale spoel nemen. Hierin komen de begrippen flux en e.m.k. niet voor.

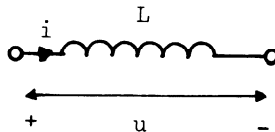


Fig. 48

3.9.2.1.

In het algemeen kunnen wij niet met enige nauwkeurigheid stellen in het geval van niet-ferromagnetische materialen dat de totaal omvatte flux gelijk is aan $n \phi$. De bepaling van het verband tussen i en de totaal omvatte flux kan tot vrij ingewikkelde berekeningen leiden. Toch blijft de vergelijking $u = L \frac{di}{dt}$ geldig, mits het medium lineair is, er geen andere stromen aan het magnetisch materiaal gekoppeld zijn en geen energie-verliezen in de draad of de kern optreden. In de praktijk zijn er altijd verliezen en is het materiaal niet alleen niet-lineair, maar vertoont ook hysteresis-effecten. Het is niet mogelijk in dit college op de fysische achtergronden in te gaan; daarvoor wordt men verwezen naar de colleges elektriciteitsleer, atoomfysica en materiaalkunde. Het is voldoende in dit stadium te weten dat de ideale spoel zoals aangegeven door verg. (3.9.2) en figuur 48 zeer goed na te bootsen is door verschillende bestaande fysische apparaten.

Opgave: Bepaal de dimensies van de farad en de henry uitgedrukt in

- (a) spanning, stroom en tijd,
- (b) de primaire grootheden lengte, massa, tijd, stroom.

3.9.3. De weerstand, condensator en spoel

De drie elementen worden gekarakteriseerd door een positieve constante en een tekenafspraken waarbij de pijl, die de positieve stroomrichting aangeeft, gericht is van het plusteken naar het minteken van de polariteitsaanduiding. Een vergelijking zoals $i = C \frac{du}{dt}$ is in bepaalde opzichten analoog aan de vergelijking $i = G u$, namelijk in beide gevallen wordt de spanning als de onafhankelijke en de stroom als afhankelijke variabele beschouwd. Eveneens is de vergelijking $u = L \frac{di}{dt}$ analoog aan $u = R i$. De op deze wijze gesuggereerde analogie tussen geleiding en capaciteit enerzijds en zelfinductie en weerstand anderzijds komt tot uiting in de opgaven van deze paragraaf.

- Opgaven:
1. Bewijs dat een parallelketen van condensatoren equivalent is aan een enkele condensator waarvan de capaciteit gelijk is aan de som van de capaciteiten van de condensatoren in de keten (zie § 1.9.2).
 2. Bewijs dat een serieketen van spoelen equivalent is aan een enkele spoel waarvan de zelfinductie gelijk is aan de som van de zelfinducties van de spoelen in de keten (zie § 1.9.1).
 3. Leid formules af voor condensator-netwerken, respectievelijk spoelnetwerken die overeenkomen met de resultaten van § 1.9.3 en § 1.10.

3.9.4. De opgeslagen energie in de condensator en de spoel

De energie die door een netwerkelement in het tijdsinterval (t_0, t_1) wordt opgenomen is

$$w = \int_{t_0}^{t_1} p(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} ui dt .$$

Voor de condensator geldt

$$w = \int_{t_0}^{t_1} C u \frac{du}{dt} dt = \frac{1}{2} C u^2 \Big|_{u(t_0)}^{u(t_1)}$$

$$= \frac{1}{2} C (\{u(t_1)\}^2 - \{u(t_0)\}^2) .$$

Deze energie wordt opgeslagen in het diëlektricum als elektrische veld-energie. Bij alle energiebeschouwingen in de fysica moeten wij een niveau als referentie, waaraan de waarde nul wordt toegekend, afspreken, evenals wij de zeespiegel als referentie afspreken bij het meten van hoogte. Het ligt voor de hand dat wij voor de condensator het nulniveau kiezen waarbij de spanning nul is. Met vacuüm als diëlektricum zijn de platen van de condensator ongeladen zodat er dan geen sprake van elektrische effecten is. In zo'n geval kunnen wij stellen

$$w_e = \frac{1}{2} C \{u(t)\}^2 ,$$

waarin de index e aangeeft dat de energie elektrische veldenergie is.

Deze energie hangt uitsluitend van de spanning af en niet van de wijze waarop de condensator is opgeladen. Dit is een voorbeeld van een conservatief systeem, namelijk als de spanning zodanig varieert dat de eindwaarde gelijk is aan de beginwaarde, dan is de netto opgenomen energie nul. Dit betekent dat alle energie die aan de condensator door bronnen of andere apparaten wordt toegevoegd terug te winnen is in elektrische vorm. (Vgl. de potentiële energie in een gravitatieveld. Vgl. ook het essentiële verschil in het geval van de weerstand.)

Ook voor de spoel gelden overeenkomstige resultaten. De in een tijdsinterval (t_0, t_1) opgenomen energie is

$$w = \int_{t_0}^{t_1} L \frac{di}{dt} i dt = \frac{1}{2} L \{i(t)\}^2 - \{i(t_0)\}^2.$$

Het ligt voor de hand een nulniveau af te spreken waarbij er zich geen magnetische effecten voordoen, d.w.z. wanneer de stroom nul is. Wij schrijven dan

$$w_m = \frac{1}{2} L \{i(t)\}^2,$$

waarin w_m de opgeslagen magnetische energie is. Deze energie wordt opgeslagen als magnetische veldenergie in het ferromagneticum of in de ruimte om de draad heen wanneer de kern niet ferromagnetisch is.

Ook de spoel is een voorbeeld van een conservatief systeem, daar de opgenomen energie slechts afhangt van de eindwaarde van de stroom en niet van de wijze waarop deze eindwaarde is bereikt. Wij spreken van een toestand van de spoel die wordt bepaald door de stroom. De spoel blijft dezelfde eigenschappen houden op t_1 als op t_2 en dezelfde energie mits $i(t_1) = i(t_2)$. Eveneens wordt de toestand van de condensator bepaald door de spanning. Bij de fysische weerstand daarentegen is de toestand niet alleen afhankelijk van i maar ook vaak van de voorgeschiedenis. De waarde van de weerstand R is afhankelijk van de temperatuur welke ook afhankelijk is van het van tevoren gedissipeerde vermogen.

De condensator en de spoel en de weerstanden zijn voorbeelden van passieve elementen, in tegenstelling tot de bronnen welke actieve elementen zijn. Een passief element kan niet meer (elektrische) energie via de klemmen leveren dan het reeds van te voren in elektrische vorm via de klemmen ontvangen heeft. Een actief element daarentegen is niet aan deze

beperking onderhevig.

Vraag: Is een batterij een actief of passief apparaat?

Dezelfde vraag voor een accu, een dynamo en een bliksemslag.

3.10. De weerstand, condensator en spoel bij wisselspanning

3.10.1. De weerstand

Voor een weerstand geldt

$$u = R i.$$

Als men stelt $i = I \sin (\omega t + \phi)$ dan is

$$u = R I \sin (\omega t + \phi).$$

Voor de amplitude van de spanning kunnen wij dan schrijven $U = R I$. Deze spanning en stroom zijn geschetst in figuur 49, waarbij gebruik gemaakt is van de uit § 3.4 bekende voerstralen.

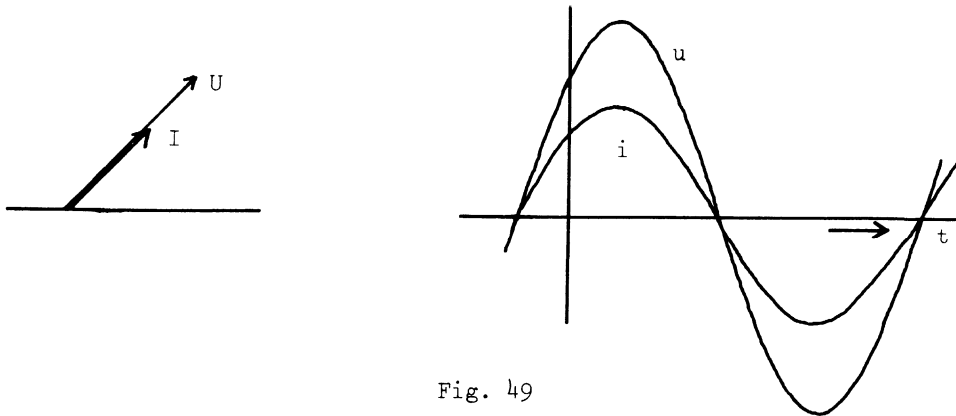


Fig. 49

Men ziet dat in het geval van een weerstand de spanning en de stroom dezelfde fase hebben, zoals ook wordt weergegeven door het voerstraal-diagram. Zo'n diagram zullen wij voortaan een wijzer-diagram noemen. In zo'n geval zeggen wij ook vaak dat de spanning en stroom in fase zijn.

3.10.2. De condensator

Hiervoor geldt

$$i = C \frac{du}{dt} .$$

Wanneer $u = U \sin (\omega t + \phi)$, dan is $i = \omega C U \cos (\omega t + \phi)$.

Voor de amplitude van de stroom kunnen wij schrijven

$$I = \omega C U , \quad \text{of} \quad U = \frac{1}{\omega C} I .$$

Dit is geschetst in figuur 50.

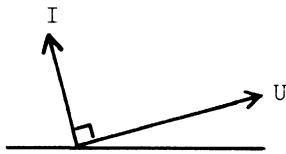
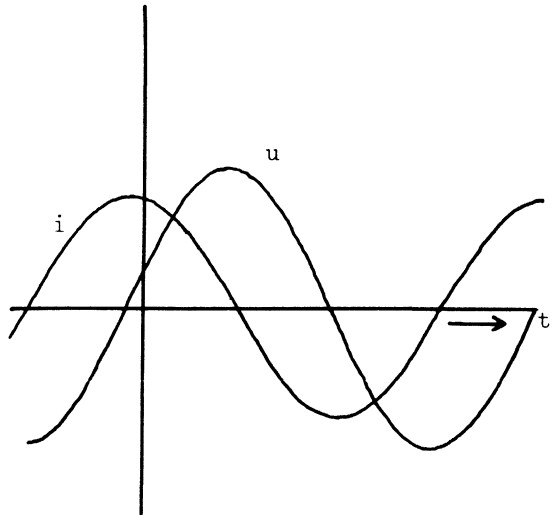


Fig. 50



Men ziet dat in het geval van een condensator de spanning $\frac{\pi}{2}$ rad in fase áchter is t.o.v. de stroom. Dit blijkt vooral duidelijk uit het wijzerdiagram.

3.10.3. De spoel

Hiervoor geldt

$$u = L \frac{di}{dt} .$$

Als men stelt $i = I \sin (\omega t + \phi)$ dan is

$$u = \omega L I \cos (\omega t + \phi) .$$

Voor de amplitude van de spanning kunnen wij dan schrijven

$$U = \omega LI, \quad \text{of} \quad I = \frac{1}{\omega L} U.$$

Dit is geschetst in figuur 51.

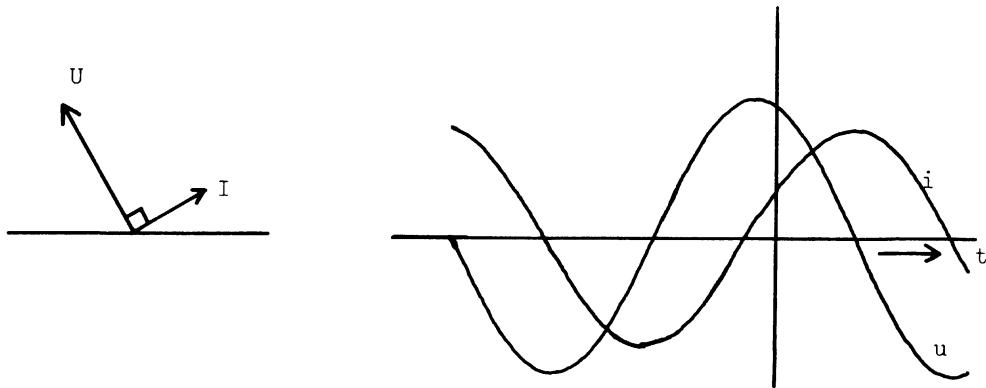


Fig. 51

Men ziet dat in het geval van een spoel de spanning $\frac{\pi}{2}$ rad in fase vóór is t.o.v. de stroom. Dit blijkt ook uit het wijzerdiagram.

3.11. Eenvoudige voorbeelden van netwerken met wisselgrootheden

Voorbeeld 1.

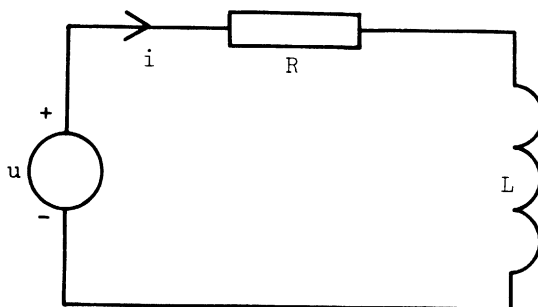


Fig. 52

Gegeven: $u(t) = U \sin \omega t$.

Gevraagd: $i(t)$.

Oplossing:

De spanningswet van Kirchhoff geeft

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} ,$$

zodat

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U \sin \omega t .$$

Deze vergelijking is een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde (er komt slechts een eerste afgeleide in voor) in de onbekende i . Voor het oplossen van dit soort differentiaalvergelijkingen bestaan algemene methoden. Omdat deze methoden nog niet in de colleges analyse zijn behandeld, zullen wij een oplossing voor i proberen te gissen. Het lijkt aannemelijk dat i sinusvormig zou kunnen zijn met dezelfde hoekfrequentie ω . Wij stellen derhalve

$$i(t) = I \sin (\omega t + \phi) .$$

Indien I en ϕ bekend zijn dan is $i(t)$ bekend. Substitueren wij i in de differentiaalvergelijking, dan vinden wij

$$\{R \sin (\omega t + \phi) + \omega L \cos (\omega t + \phi)\} I = U \sin \omega t .$$

Uitschrijven van $\sin (\omega t + \phi)$ en $\cos (\omega t + \phi)$ geeft

$$\begin{aligned} \{(R \cos \phi - \omega L \sin \phi) \sin \omega t + (\omega L \cos \phi + R \sin \phi) \cos \omega t\} I = \\ = U \sin \omega t . \end{aligned}$$

Indien de veronderstelde oplossingsvorm juist is, moet deze betrekking gelden voor alle tijd, zodat

$$\text{met } t = \frac{\pi}{2\omega} , \quad R \cos \phi - \omega L \sin \phi = \frac{U}{I} ,$$

$$\text{en met } t = 0 , \quad \omega L \cos \phi + R \sin \phi = 0 .$$

Uit deze twee vergelijkingen vinden wij als oplossing voor $\sin \phi$ en $\cos \phi$:

$$\sin \phi = -\frac{U}{I} \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \cos \phi = \frac{U}{I} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Maar $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, zodat $\frac{U}{I} = \pm \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

Aangezien wij de amplitude van een sinusvormige grootheid steeds positief rekenen (immers is er geen behoefte aan een negatieve amplitude daar $-I \sin(\omega t + \phi) = I \sin(\omega t + \phi + \pi)$), concluderen wij dat

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Het volgt dan dat $\tan \phi = \frac{\omega L}{R}$ met $\frac{-\pi}{2} \leq \phi \leq 0$, aangezien $\sin \phi \leq 0$ en $\cos \phi \geq 0$ is.

De conclusie is dat in het gegeven netwerk een sinusvormige stroom kan bestaan met amplitude en referentiefase zoals hierboven is aangegeven.

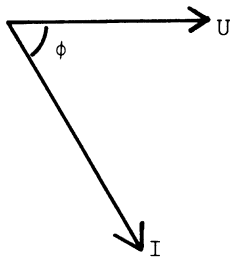


Fig. 53

Vraag: Is de stroom in een serieketen bestaande uit een weerstand en een spoel in fase voor of achter t.o.v. de spanning van de keten?

Voorbeeld 2.

Gegeven : $u = U \sin \omega t$

Gevraagd : $i(t)$

Oplossing:

De spanningswet van Kirchhoff geeft

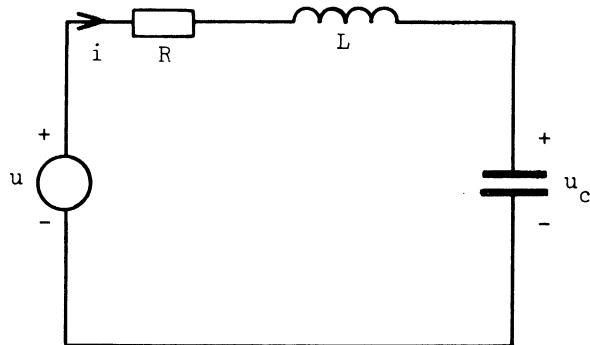


Fig. 54

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c,$$

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i.$$

Dit is een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde waarvoor wij op dezelfde manier een oplossing zullen zoeken.

Wij stellen opnieuw

$$i = I \sin(\omega t + \phi).$$

Substitutie voor u en i geeft:

$$\omega U \cos \omega t = \{-\omega^2 L \sin(\omega t + \phi) + \omega R \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} \sin(\omega t + \phi)\} I.$$

Uitschrijven van $\sin(\omega t + \phi)$ en $\cos(\omega t + \phi)$ geeft na delen door ω :

$$U \cos \omega t = \left\{ \left((-\omega L + \frac{1}{\omega C}) \cos \phi - R \sin \phi \right) \sin \omega t + \left(R \cos \phi + (-\omega L + \frac{1}{\omega C}) \sin \phi \right) \cos \omega t \right\} I.$$

Indien de veronderstelde oplossingsvorm juist is moet deze betrekking gelden voor alle tijd, zodat

$$\text{met } t = \frac{\pi}{2\omega}, \quad (-\omega L + \frac{1}{\omega C}) \cos \phi - R \sin \phi = 0,$$

$$\text{en met } t = 0, \quad R \cos \phi + (-\omega L + \frac{1}{\omega C}) \sin \phi = \frac{U}{I}.$$

Door deze vergelijkingen op te lossen voor $\sin \phi$ en $\cos \phi$ volgt:

$$\sin \phi = \frac{U}{I} \frac{(-\omega L + \frac{1}{\omega C})}{R^2 + (-\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}, \quad \cos \phi = \frac{U}{I} \frac{R}{R^2 + (-\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Maar $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, zodat

$$U = I \sqrt{R^2 + (-\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}, \quad \tan \phi = \frac{-\omega L + \frac{1}{\omega C}}{R}$$

waarbij, aangezien $\cos \phi \geq 0$ is, er moet gelden $\frac{-\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Wij hebben hiermede aangetoond dat een sinusvormige stroom in dit netwerk mogelijk is indien de amplitude en de relatieve fase aan de gevonden voorwaarden voldoen.

Voorbeeld 3.

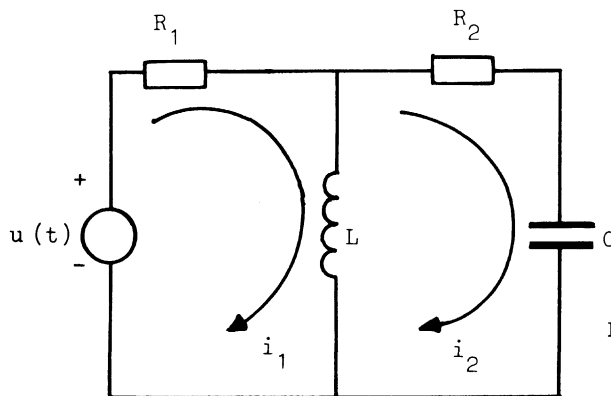


Fig. 55

Gegeven : het schema.

Gevraagd: geef de vergelijkingen waarmee men dit netwerkprobleem kan oplossen, d.w.z. geef vergelijkingen waaruit $i_1(t)$ en $i_2(t)$ volgen.

Oplossing:

De spanningswet van Kirchhoff voor de linkermaas geeft:

$$u(t) = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt}.$$

Voor de rechtermaas geldt:

$$0 = -L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + u_c .$$

Differentiëren geeft:

$$0 = -L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} .$$

Hier hebben wij te maken met twee simultane lineaire differentiaalvergelijkingen met twee onbekenden. Het is wel in te zien dat als wij dezelfde methode als bij de twee vorige voorbeelden toepassen, aanzienlijk veel rekenwerk nodig zal zijn. Bij nog ingewikkelder netwerken zal dit rekenwerk nog omvangrijker worden. Wij hebben derhalve behoefte aan een heel andere aanpak die tot een algemene methode leidt met zo min mogelijk rekenwerk. Deze methode zullen wij in het volgende hoofdstuk ontwikkelen; zij heet "de complexe rekenwijze".

Het derde voorbeeld is hier genoemd om duidelijk te maken dat wij met de tot dusverre ontwikkelde theorie niet uitkomen. Met de nieuwe theorie van hoofdstuk 4 zullen wij niet alleen dit probleem eenvoudig kunnen oplossen maar ook veel moeilijker problemen.

4. DE COMPLEXE REKENWIJZE

Teneinde een efficiënte rekenmethode op te bouwen zullen wij een schijnbare omweg bewandelen.

4.1. Exponentiële functies

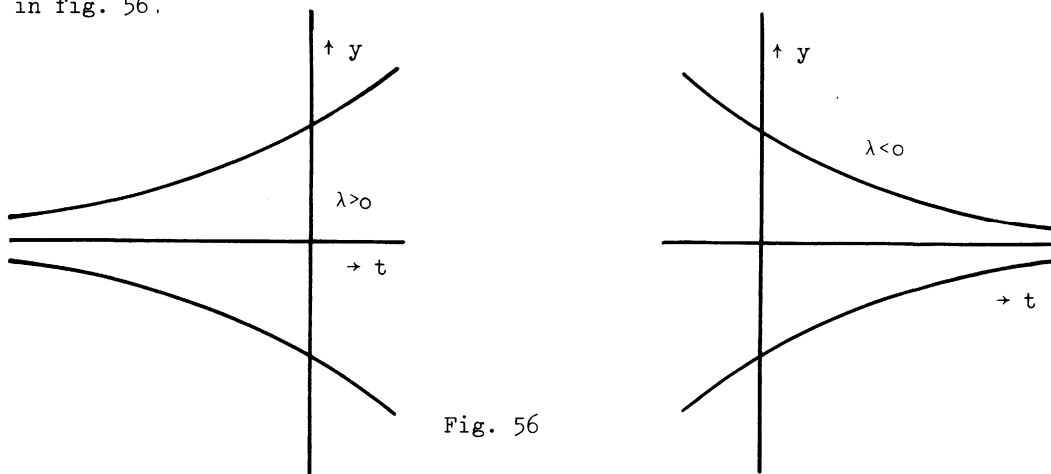
De exponentiële functie van de tijd is een functie $\exp t$ met de kenmerkende eigenschap dat:

$$\frac{d}{dt} \exp t = \exp t .$$

Wij beschouwen hier een exponentiële functie van een lineaire functie van de tijd. Deze functie voldoet aan:

$$\frac{d}{dt} (\exp(\lambda t + \alpha)) = \lambda \exp(\lambda t + \alpha).$$

Als wij $\exp(\lambda t + \alpha) = y$ stellen, dan is y een oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = \lambda y$. Het is niet moeilijk om de algemene gedaante van $y(t)$ te bepalen. De differentiaalvergelijking zegt in feite dat de helling van de kromme evenredig aan de ordinaat is. Dit wordt weergegeven in fig. 56.



men lette op dat wij niet uit de differentiaalvergelijking alleen kunnen bepalen of y positief of negatief is. Wij spreken echter af dat $\exp(\lambda t + \alpha)$ een positieve functie is, zodat de krommen onder de t -as de functie $-\exp(\lambda t + \alpha)$ voorstellen, welke ook aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Nu is het "niveau" van de exponentiële functie nog niet bepaald. Want als $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, dan is ook $\frac{dz}{dt} = \lambda z$, waarin $z = ky$ met k een willekeurige constante. Wij spreken af dat $\exp(0) = 1$. De waarden van de functie zijn in principe nu bepaald voor alle t .

Opgave: Bereken een benaderende uitdrukking voor de functie $\exp(\lambda t)$ in de omgeving van $t = 0$, uitgaande van de differentiaalvergelijking, de stelling van Taylor en de middelwaarde stelling. Toon aan hoe de functie-waarden bij benadering in andere tijdsintervallen kunnen worden bepaald.

Stel nu dat wij twee exponentiële functies hebben, $\exp(\lambda_1 t + \alpha_1)$ en $\exp(\lambda_2 t + \alpha_2)$. Dan zijn de corresponderende differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \text{ en } \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2.$$

$$\text{Nu is } \frac{d}{dt}(y_1 y_2) = y_1 \frac{dy_2}{dt} + y_2 \frac{dy_1}{dt} = (\lambda_2 + \lambda_1) y_1 y_2.$$

Blijkbaar is $y_1 y_2$ ook een exponentiële functie: $\exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)t + \beta\}$.

Maar als $t = 0$ is, is $y_1(0) = \exp(\alpha_1)$, $y_2(0) = \exp(\alpha_2)$, $y_1 y_2(0) = \exp \beta$.

Uit deze resultaten volgt $y_1 y_2 = \exp(\lambda_1 t + \alpha_1) \exp(\lambda_2 t + \alpha_2) =$

$$= \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)t + \beta\}, \quad \exp(\alpha_1) \exp(\alpha_2) = \exp \beta.$$

Als $t = -\alpha_1/\lambda_1$ en $\lambda_2 = 0$ dan is $\exp(0) \exp(\alpha_2) = \exp(-\alpha_1 + \beta)$ zodat $\alpha_2 = \beta - \alpha_1$.

Derhalve is $\exp(\lambda_1 t + \alpha_1) \exp(\lambda_2 t + \alpha_2) = \exp\{(\lambda_1 + \lambda_2)t + \alpha_1 + \alpha_2\}$.

Hiermede wordt de tweede kenmerkende eigenschap uitgedrukt, nl. het produkt van twee exponentiële functies is gelijk aan de exponentiële functie van de som van de argumenten van de component-exponentiële functies.

Stellen wij $\lambda_2 = \alpha_1 = 0$ in het bovenstaande, dan volgt $\exp(\lambda_1 t) \exp \alpha_2 = \exp(\lambda_1 t + \alpha_2)$.

Met $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, volgt $\exp(\alpha_1) \exp(\alpha_2) = \exp(\alpha_1 + \alpha_2)$ en met $\alpha_1 = -\alpha_2$ is $\exp \alpha_1 \exp(-\alpha_1) = \exp(0) = 1$.

Bovendien is $\exp\{\lambda(t + \tau)\} = \exp(\lambda\tau)\exp(\lambda t)$ (met $\lambda\tau$ constant).

Maar $\exp\{\lambda(t + \tau)\}$ wordt uit $\exp \lambda t$ verkregen door de kromme $\exp(\lambda t)$ een afstand τ naar links langs de tijd-as te verschuiven (verg. § 3.4). Derhalve hebben wij het derde belangrijke resultaat van de exponentiële functie:

Verschuiving van de functie langs de tijd-as komt overeen met vermenigvuldiging van de functie met een constante.

4.2.

Voor de eenvoudige serieschakeling van fig. 57a geldt, zoals wij in § 3.11 gezien hebben,

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i.$$

Stel dat $i = I e^{\lambda t}$; dan is

$$\frac{du}{dt} = (\lambda^2 L + \lambda R + \frac{1}{C}) I e^{\lambda t}.$$

Na integratie volgt

$$u = (\lambda L + R + 1/\lambda C) I e^{\lambda t} + k.$$

Wij veronderstellen dat de integratie-constante nul is. De fysische betekenis hiervan voor het geval dat $\lambda > 0$ is, is als volgt:

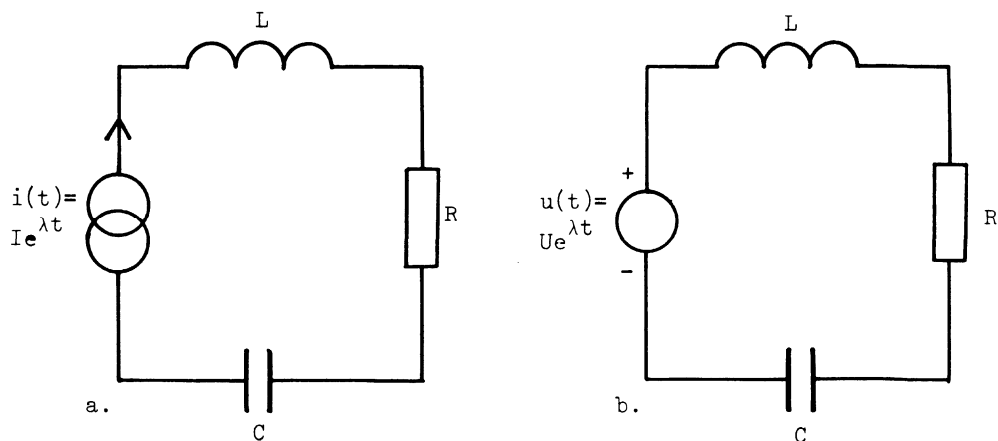


Fig. 57

Aangezien $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda t} = 0$ (fig. 56) is dan $u(-\infty) = k$.

Maar $i(-\infty) = 0$ en $\frac{di}{dt} \Big|_{t=-\infty} = 0$. Het stellen van $k = 0$ is dan equivalent aan de eis: de condensatorspanning voor $t = -\infty$ is nul.

Wij hebben dan $u(t) = U e^{\lambda t}$ met $U = (\lambda L + R + 1/\lambda C)I$ en

$$i(t) = I e^{\lambda t}.$$

D.w.z. $U = ZI$, waarin $Z = \lambda L + R + \frac{1}{\lambda C}$ een functie van λ is, die wij de impedantie noemen. Deze grootheid Z is een functie van λ (bij elke verandering van de exponent in $i(t)$ krijgen wij een andere Z) en wij zullen soms de nadruk hierop leggen door te schrijven $Z(\lambda)$. De impedantie-functie speelt dezelfde rol bij exponentiële stromen en spanningen als de weerstand bij gelijkstromen en -spanningen. De vergelijking $U = ZI$ is dan de vorm die de wet van Ohm bij dit functie-type aanneemt.

In het vervolg zullen wij ook vaak de termen excitatie en responsie gebruiken. De excitatie in dit voorbeeld is de stroom van de stroombron die als primaire oorzaak van het in de schakeling optredende verschijnsel wordt beschouwd. De responsie is het antwoord hierop, in dit geval de spanning die als een gevolg van de excitatie wordt gezien.

Als de stroombron wordt vervangen door een spanningsbron (fig. 57b), dan blijven alle voorgaande resultaten geldig als alle stromen en spanningen exponentieel zijn.

Wij zullen voorlopig niet verder op dit onderwerp ingaan, maar alleen de nadruk er op leggen dat de berekening in dit geval aanzienlijk eenvoudiger is dan in § 3.11. Het zou bijzonder voordelig zijn indien de exponentiële functie op één of andere wijze op het probleem van de berekening van de sinusvormige excitatie toegepast kon worden.

4.3. Complexe getallen

Dit blijkt inderdaad mogelijk te zijn wanneer wij gebruik maken van de stelling van Euler. Eerst merken wij op, dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\cos \omega t + j \sin \omega t) &= -\omega \sin \omega t + j\omega \cos \omega t = \\ &= j\omega (\cos \omega t + j \sin \omega t) \end{aligned}$$

Blijkbaar bezit de complexe functie* $\cos \omega t + j \sin \omega t = z$ dezelfde kenmerkende eigenschap als de exponentiële functie nl. $\frac{dz}{dt} = j\omega z$. Evenals de operatie van vermenigvuldiging van een reëel getal met zichzelf een nieuwe functie x^2 definieert, en dezelfde operatie toegepast op een complex getal z een nieuwe complexe functie z^2 definieert, zo kunnen wij de exponentiële functie met imaginaire exponent definiëren als

$$\exp(j\omega t) = \cos \omega t + j \sin \omega t, \text{ (Euler)}$$

welke in overeenstemming is met de eis dat $\exp(0) = 1$.

Een bestudering van § 4.1 levert de conclusie, dat het nergens in de afleiding van de hoofdeigenschappen van $\exp \lambda t$ nodig was aan te nemen dat λ reëel is. Alle resultaten - behalve diegene die betrekking hebben op de vorm van de kromme - blijven geldig als λ complex is. Voorlopig echter beperken wij ons tot een zuiver imaginaire λ .

Als controle vinden wij

$$\begin{aligned} (\cos \phi_1 + j \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + j \sin \phi_2) &= \exp j \phi_1 \exp j \phi_2 \\ &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + j(\cos \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_2 \cos \phi_1) \\ &= \cos(\phi_1 + \phi_2) + j \sin(\phi_1 + \phi_2) = \exp(j(\phi_1 + \phi_2)), \end{aligned}$$

in overeenstemming met de tweede kenmerkende eigenschap.

Als onmiddellijk uitbreiding van het resultaat hebben wij

$$\begin{aligned} \exp(j(\omega t + \phi)) &= \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi) = \exp(j\omega t) \exp(j\phi) \\ &= K \exp(j\omega t), \text{ waarin } K = \cos \phi + j \sin \phi, \text{ een complexe constante is.} \end{aligned}$$

Wanneer $z = x + jy$ een willekeurig complex getal is, is

$$z \exp(j\omega t) = \sqrt{x^2 + y^2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \exp(j\omega t)$$

*) In de wiskunde wordt $\sqrt{-1}$ aangeduid met i . In de elektrotechniek is dit symbool echter gereserveerd voor stroom. De volgende letter j in het alfabet wordt derhalve voor $\sqrt{-1}$ gebruikt.

$$= |z| (\cos \phi + j \sin \phi) \exp(j\omega t),$$

$$= |z| \exp j(\omega t + \phi) = |z| \exp (j(\omega t + \arg z)),$$

$$\text{waarin } \phi = \arg(z) = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right)$$

$$\text{en } z = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wij noemen $|z|$ de modulus en $\arg z$ het argument van z .

Wanneer z_1 en z_2 twee willekeurige complexe getallen zijn, is

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \exp (j(\arg z_1 + \arg z_2))$$

$$\text{en is } \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \exp (j(\arg z_1 - \arg z_2)).$$

Wij zullen ook vaak gebruik maken van het toegevoegd complexe getal, nl.

$$z^* = x - jy. \text{ Dan is } \text{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + z^*),$$

$$\text{Im}(z) = y = \frac{1}{2j} (z - z^*).$$

$$(z_1 z_2)^* = (|z_1| |z_2| \exp j (\arg z_1 + \arg z_2))^* =$$

$$|z_1| |z_2| \exp (-j(\arg z_1 + \arg z_2)) = z_1^* z_2^*.$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad \left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right]^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}.$$

Men kan een complex getal meetkundig voorstellen op twee gelijkwaardige manieren. Het getal kan worden afgebeeld als een punt in een plat vlak met coördinaten $x = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$ of als een wijzer, nl. een voerstraal van de oorsprong naar het punt (x, y) gepaard gaande met een richting (van de oorsprong naar het punt (x, y)).

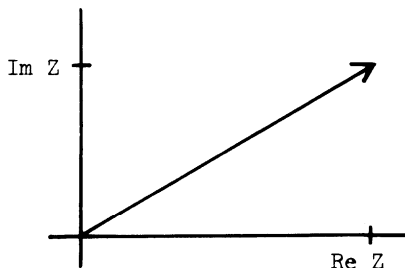


Fig. 58

Opgaven: 1. Hoe worden de modulus en het argument in dit diagram voorgesteld?

Wij noemen het vlak waarin z is afgebeeld het complexe vlak van Gauss of Argand.

2. Druk j uit als een exponentiële functie en geef de meetkundige interpretatie.

3. wat is de meetkundige interpretatie van jz ?

4. Construeer in het complexe vlak de wijzers van z_1 , z_2 en $z_1 + z_2$.

Toon aan dat de regel voor de vector-som hier geldt.

Geef ook een constructie voor z_1 , z_2 en $z_1 - z_2$.

5. Construeer in het complexe vlak de wijzers z_1 , z_2 , $z_1 z_2$.

Men lette goed op dat de operatie \times niets anders is dan het overal vervangen van j door $-j$. Wij kunnen een complex getal beschouwen als een functie van j . Het toegevoegd complexe getal van een gegeven getal, dat uit een aantal algebraïsche operaties volgt, kan evengoed gevonden worden door de operaties uit te voeren en daarna j te vervangen door $-j$ als eerst j te vervangen door $-j$ en daarna de operaties uit te voeren.

4.4. Complexe stromen en spanningen

Wij zullen nu veronderstellen dat wij met netwerken te maken hebben, waarin alle bronsterkten van de vorm $i(t) = I \exp(j\omega t)$ of $u(t) = U \exp(j\omega t)$, waarin I en U in het algemeen complexe constanten zijn.

Aan deze complexe grootheden kunnen wij geen directe fysische betekenis

toekennen. Wij kunnen er echter wel mee rekenen en, zoals zal blijken, op vrij eenvoudige wijze. Deze rekenprocedure vormt dan een zeer belangrijke stap naar het einddoel, nl. een eenvoudige rekenprocedure voor de onbekende fysische grootheden te vinden.

Wij gaan steeds uit van de geldigheid van de wetten van Kirchhoff - ook bij complexe grootheden; de parameters R, L, C zijn echter steeds reële, positieve constanten. Verder blijft het superpositiebeginsel geldig, want alle vergelijkingen, zowel algebraïsche als differentiaalvergelijkingen, zijn lineair.

Bijvoorbeeld, indien (i', u') (i'', u'') aan de vergelijking

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt} \text{ voldoen, dan voldoet ook } (\alpha i' + \beta i'', \alpha u' + \beta u''),$$

$$\text{aangezien } L \frac{d^2}{dt^2} (\alpha i' + \beta i'') + R \frac{d}{dt} (\alpha i' + \beta i'') + \frac{1}{C} (\alpha i' + \beta i'')$$

$$= \alpha \left[L \frac{d^2}{dt^2} i' + R \frac{di'}{dt} + \frac{1}{C} i' \right] + \beta \left[L \frac{d^2 i''}{dt^2} + R \frac{di''}{dt} + \frac{1}{C} i'' \right]$$

$$= \alpha \frac{du'}{dt} + \beta \frac{du''}{dt} = \frac{d}{dt} (\alpha u' + \beta u''),$$

en dit resultaat blijft geldig, onafhankelijk van de vraag of de i , u reëel of complex zijn. Het is juist vanwege het superpositiebeginsel, dat de complexe rekenwijze zinvol is. Hoewel de complexe stromen en spanningen zelf niet fysisch zijn, zijn bepaalde combinaties hiervan reëel en komen met fysische grootheden overeen.

In het bijzonder zijn de volgende grootheden reëel:

$$\frac{1}{2}(u + u^*) = \frac{1}{2}(U \exp(j\omega t) + U^* \exp(-j\omega t)) = |U| \cos(\omega t + \phi) \text{ en}$$

$$\frac{1}{2j}(u - u^*) = \frac{1}{2j}(U \exp(j\omega t) - U^* \exp(-j\omega t)) = |U| \sin(\omega t + \phi)$$

waarin $\phi = \arg U$.

Opgave: Reken deze relaties na.

Wij kunnen blijkbaar de reële sinusfuncties $|U| \cos(\omega t + \phi)$, $|U| \sin(\omega t + \phi)$ beschouwen als de superpositie van twee complexe exponentiële functies.

Wij zullen nu het tweede probleem van § 3.11 volgens de zojuist ingevoerde principes oplossen. Om het schrijven te vergemakkelijken stellen wij

$j\omega = \lambda$, zodat $-j\omega = \lambda^*$. Wanneer het ons uitkomt, zullen wij ook gebruik maken van de alternatieve notatie van de exponentiële functie, nl.

$$\exp \lambda t \equiv e^{\lambda t}.$$

Wij beginnen met de differentiaalvergelijking

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt} \text{ en met de spanningssterkte } u = U e^{\lambda t}$$

Wij zoeken een oplossing van de vergelijking van de vorm $i = I e^{\lambda t}$.

Dan is

$$\left(\lambda^2 L + \lambda R + \frac{1}{C}\right) I = \lambda U, \quad \text{d.w.z. } I = \frac{U}{\lambda L + R + \frac{1}{\lambda C}}. \quad (4.4.1)$$

Hieruit volgt dat de stroom $i(t) = \frac{U}{\lambda L + R + \frac{1}{\lambda C}} e^{\lambda t} = \frac{U}{Z} e^{\lambda t}$, bij de

spanning $U e^{\lambda t}$ behoort. Het volgt onmiddellijk uit verg. (4.4.1.) dat

$$I^* = \frac{U^*}{\lambda^* L + R + \frac{1}{\lambda^* C}},$$

zodat de stroom $(i(t))^* = \frac{U^*}{\lambda^* L + R + \frac{1}{\lambda^* C}} e^{\lambda^* t}$, bij de spanning $U^* e^{\lambda^* t}$

behoort. Dit is een zeer belangrijk gevolg van het voorgaande, dat alleen geldt omdat L, R, C reëel zijn. Als R, L of C complex waren dan behoort de weliswaar de stroom

$$\frac{U^*}{Z^*} e^{\lambda^* t}$$

bij de spanning $Ue^{\lambda t}$, maar deze stroom is niet gelijk aan $(i(t))^*$.

Wij gaan nu de complexe bronspanning en de toegevoegde complexe bronspanning op elkaar superponeren. Wij weten uit het superpositiebeginsel, dat de stroom, die bij de resulterende spanning behoort, de superpositie is van de stroom die - ieder afzonderlijk - bij de bronspanning behoren (fig. 59).

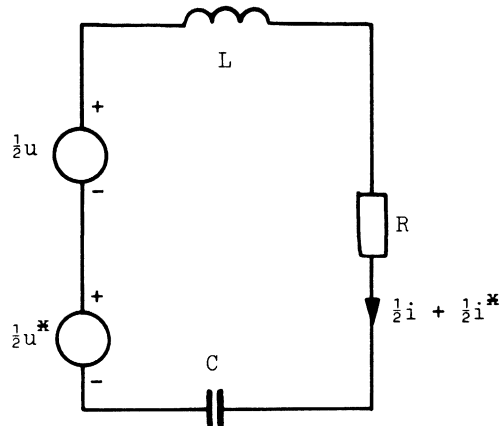


Fig. 59

Wij vinden dan dat de stroom

$$\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^* = \operatorname{Re} i = \operatorname{Re} \left[\frac{U}{\lambda L + R + \frac{1}{\lambda C}} e^{\lambda t} \right]$$

correspondeert met de spanning

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^* = \operatorname{Re} u = \operatorname{Re} \left[U e^{\lambda t} \right] = |U| \cos(\omega t + \phi).$$

Hier in feite in essentie is de oplossing van het probleem gegeven; het enige rekenwerk dat wij behoeven te verrichten is het berekenen van het reële deel van $\frac{U}{Z} e^{\lambda t}$.

$$\text{Dus } i(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{U}{\lambda L + R + \frac{1}{\lambda C}} e^{\lambda t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{U}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} e^{j\omega t} \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{|U|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp \{j(\omega t + \phi - \alpha)\} \right] =$$

$$= \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t + \phi - \alpha),$$

waarin $\alpha = \arg(R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$, waarbij $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$,
 aangezien $R > 0$.

Dit resultaat komt overeen met wat wij in § 3.11 gevonden hebben indien wij hier stellen $\phi = \frac{-\pi}{2}$ en α vervangen door $-\phi$.

Wij hadden evengoed de sinusvormige spanning als de superpositie van de twee complexe spanningen $\frac{1}{2j} u$ en $\frac{-1}{2j} u^*$ kunnen beschouwen. De bijbehorende stromen zijn dan $\frac{1}{2j} i$ en $\frac{-1}{2j} i^*$. Wij kunnen dan concluderen dat de spanning $\text{Im}(ue^{\lambda t}) = |U| \sin(\omega t + \phi)$ aanleiding geeft tot de stroom

$$\text{Im}(ie^{\lambda t}) = \text{Im}\left(\frac{U}{R + j\omega L - \frac{1}{j\omega C}} e^{j\omega t}\right) = \frac{|U|}{|Z|} \sin(\omega t + \phi - \alpha).$$

In beide gevallen is de stroom α rad. in fase achter t.o.v. de spanning. Door ϕ te vervangen door $\phi + \frac{\pi}{2}$ vinden wij uiteraard dezelfde uitkomst als bij de berekening met de cosinusfunctie. Een berekening gebaseerd op het reële deel van de functie is vaak eenvoudiger en geeft minder kans tot het maken van fouten dan een berekening gebaseerd op het imaginaire deel, waar een extra factor j aanwezig is.

Om het geheel samen te vatten, kunnen wij zeggen dat de amplitude van de stroom gelijk is aan de amplitude van de spanning, gedeeld door de modulus van Z , en dat de stroom in fase achter is t.o.v. de spanning, met een hoek gelijk aan het argument van Z (figuur 60).

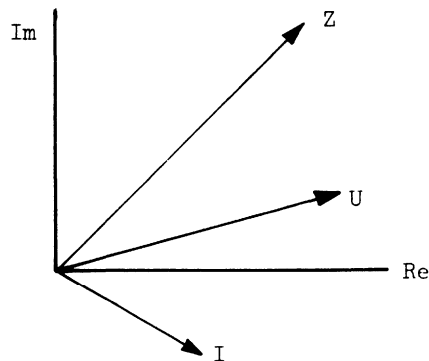


Fig. 60

Het grote voordeel van deze rekenwijze is dat, dankzij de bijzondere eigenschappen van de exponentiële functie, de berekening van de complexe stroom (of spanning) tot eenvoudige algebra wordt teruggebracht en is in wezen hetzelfde als de berekening van een gelijkvormig weerstandsnetwerk bij gelijkstroom en -spanning. De tweede stap, het berekenen van de reële stroom (of spanning), is dan een kwestie van het bepalen van het reële of het imaginaire deel van een complex getal.

4.5. Analyse van netwerken met sinusvormige bronsterkten

Een groot deel van de wisselstroomtheorie heeft betrekking op het berekenen van de complexe stroom of spanning bij exponentiële (met imaginaire exponent) excitatie. Zoals wij reeds gezien hebben bestaat de tweede stap uit het bepalen van het reële of het imaginaire deel van een complex getal. Aan de hand van het voorbeeld van § 4.4 hebben wij kunnen zien hoe, in grote lijnen, de methode werkt. Wij zullen nu wat systematischer en algemener op de methode zelf ingaan.

Wij weten dat bij het opstellen van de vergelijkingen die het gedrag van een netwerk beschrijven een stelsel differentiaalvergelijkingen verkregen wordt. Bij exponentiële excitatie worden exponentiële responsies (met dezelfde exponent als die van de excitatie) verkregen. Door substitutie van alle stroom- en spanningstermen

$$i_m(t) = I_m e^{\lambda t}, \quad u_n(t) = U_n e^{\lambda t}$$

in de vergelijkingen wordt een stelsel algebraïsche vergelijkingen in de I_m en U_n verkregen die weliswaar functies van λ zijn. De vraag rijst of wij de stap van het opschrijven van de differentiaalvergelijkingen kunnen overslaan en direct op het opschrijven van de algebraïsche vergelijkingen kunnen overgaan. Naar analogie van de gelijkstroomnetwerken zou zo'n rekenwijze direct op de wetten van Kirchhoff en van Ohm gebaseerd moeten worden.

4.5.1. De wetten van Kirchhoff

Dat de stroomwet van Kirchhoff ook geldig is voor de complexe grootheden I_k is als volgt in te zien. In iedere tak hebben wij een stroom van de vorm $i_k(t) = |I_k| \cos(\omega t + \phi_k) = |I_k| (\cos \phi_k \cos \omega t - \sin \phi_k \sin \omega t)$.

De stroomwet $\sum i_k(t) = 0$ is geldig voor alle tijdstippen, in het bijzonder

voor $t = 0$ en $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Het gevolg is dat

$$\sum |I_k| \cos \phi_k = 0 = \sum |I_k| \sin \phi_k,$$

d.w.z. $\sum \operatorname{Re}(I_k) = 0 = \sum \operatorname{Im}(I_k)$, zodat $\sum I_k = 0$.

Op dezelfde wijze geldt de spanningswet voor de complexe grootheden U_1 , zodat $\sum U_1 = 0$.

4.5.2. De netwerkelementen

Voor de weerstand geldt $u = Ri$.

Als $i = Ie^{\lambda t}$, dan is $u = RIe^{\lambda t}$, zodat $U = RI$ of $I = \frac{1}{R} U$.

Voor de spoel geldt $u = L \frac{di}{dt}$.

Als $i = Ie^{\lambda t}$, dan is $u = \lambda LIe^{\lambda t}$, zodat $U = \lambda LI$ of $I = \frac{1}{\lambda L} U$.

Voor de condensator geldt $i = C \frac{du}{dt}$.

Als $u = Ue^{\lambda t}$, dan is $i = \lambda CUe^{\lambda t}$, zodat $I = \lambda CU$ of $U = \frac{1}{\lambda C} I$.

Voor de spanningsbron geldt $u = U_0 e^{\lambda t}$, waarbij U_0 een bekend veronderstelde constante is.

Voor de stroombron geldt $i = I_0 e^{\lambda t}$, waarbij I_0 een bekend veronderstelde constante is.

4.5.3.

Zodoende hebben wij een rekenwijze verkregen die isomorf^{*} met de algebra van netwerken bij gelijkstroom is. In elke tak van het netwerk vloeit een complexe stroom I_k ; over elke tak bestaat er een complexe spanning U_k . Deze stromen voldoen aan de stroomwet van Kirchhoff en deze spanningen voldoen aan de spanningswet van Kirchhoff. Het verband tussen de stroom en de spanning van een tak is lineair, zodat een van de volgende mogelijkheden geldt:

$$\begin{aligned} U &= ZI & I &= YU \\ \text{of} & & U &= U_0 \\ \text{of} & & I &= I_0. \end{aligned}$$

De grootheden Z , Y heten de impedantie, respektievelijk admittantie en spelen de rollen die de weerstand en de geleiding bij gelijkstroomnetwerken vervullen. Dus de impedantie van de spoel is λL , de admittantie van de condensator is λC , terwijl de impedantie en de admittantie van de weerstand R en G zijn. Wanneer men over impedantie en admittantie tegelijk wil praten, wordt het woord immittantie gebruikt.

Wel moeten wij bedenken dat in het algemeen zowel de immittantie als de stroom en spanning functies van λ zijn. Elke keuze van de waarde van ω in $\lambda = j\omega$ leidt tot een andere waarde van de stroom of spanning. De spanningspolariteit en de stroomrichting worden steeds bepaald in overeenstemming met de algemene bepalingen voor tijdsafhankelijke variabelen, waarvan de complexe variabelen afgeleid zijn. Op deze wijze is fig. 61 afgeleid.

*) isomorf wil zeggen: van dezelfde gedaante.

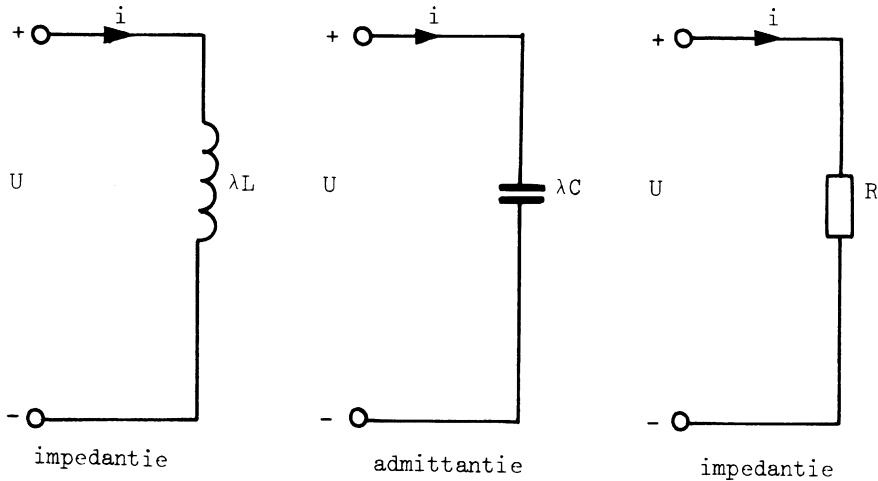


Fig. 61

Men lette goed op dat, aangezien $\lambda = j\omega$, een impedantie $-\lambda L = -j\omega L$, met $L > 0$, betrekking moet hebben op een spanning $Ue^{-j\omega t}$ en een stroom $Ie^{-j\omega t}$, zodanig dat $U = -j\omega LI$.

Nu wij de isomorfie van netwerken met gelijkstroom en de met behulp van complexe variabelen beschreven netwerken en wisselstromen hebben aangetoond, kunnen wij onmiddellijk alle theorema's en resultaten van hoofdstukken 1 t/m 3 voor wisselstroomgrootheden interpreteren.

Bijvoorbeeld, de serie-keten van fig. 57 heeft een impedantie

$\lambda L + R + 1/\lambda C$. Bij meer gecompliceerde ketens worden ingewikkeldere uitdrukkingen verkregen. Zoals uit het laatste stelsel vergelijkingen in § 3.12 volgt is

$$\frac{I_0}{U_0} = Y(\lambda) = \frac{(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4) + Z_5(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)}{Z_1Z_4(Z_2+Z_3) + Z_2Z_3(Z_1+Z_4) + Z_5(Z_2+Z_3)(Z_1+Z_4)},$$

waarin de stroom en spanning nu complex en functies van λ zijn en alle weerstanden door algemene impedanties zijn vervangen.

Eén belangrijke eigenschap moeten wij nog afleiden.

Aangezien R, L, C , reëel zijn, is $(\lambda L)^* = (j\omega L)^* = -j\omega L = \lambda^* L$,

$(\lambda C)^* = \lambda^* C$. D.w.z., indien in een uitdrukking voor een immittantiefunctie elke term door de toegevoegd complexe term vervangen wordt, is het resultaat hetzelfde als zou volgen uit een rechtstreekse vervanging van λ door λ^* , dus $j\omega$ door $-j\omega$.

Hieruit volgt $(Z(j\omega))^* = (Z(\lambda))^* = Z(\lambda^*) = Z(-j\omega)$.

Dit is alleen geldig omdat de elementenwaarden reëel zijn.

Als bv. $U = \lambda(a+jb) I$, d.w.z. $Z = (a+jb)\lambda$, dan zou gelden

$$U^* = \lambda^* (a-jb) I^*, \text{ en is } (Z(\lambda))^* \neq Z(\lambda^*).$$

Hieruit volgt de rekenwijze voor de bepaling van de responsie van een reële sinusvormige excitatie.

$|U| \cos(\omega t + \phi)$ is de som van $\frac{1}{2}Ue^{\lambda t}$ en $\frac{1}{2}U^*e^{\lambda^* t}$:

De responsie $i(t)$ is daardoor de som van $\frac{1}{2}YUe^{\lambda t}$ en $\frac{1}{2}Y^*U^*e^{\lambda^* t}$, d.w.z.

$$i(t) = \text{Re}(YUe^{\lambda t}).$$

Voorbeelden

1.

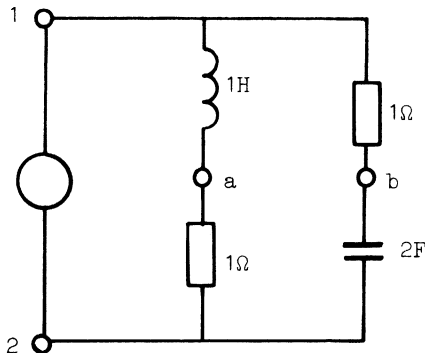


Fig. 62

Gegeven: $u_{12} = 5 \sin(t + \frac{\pi}{4})$. Gevraagd: Bepaal $u_{ab}(t)$.

Oplissing: Wij kunnen stellen $U_{12} = 5 \exp(-j\frac{\pi}{4})$. Of wij kunnen een nieuwe tijd-variabele t' invoeren zodanig dat $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \cos t'$. Dan is $t' = t - \pi/4$, hetgeen overeenkomt met een verplaatsing van tijdsvoorsprong.

M.b.t. **deze** nieuwe variabele nemen wij $U_{12} = 5$ (reël).

$$\text{Dan is } U_{a2} = \frac{1}{1+j} 5 \text{ en } U_{b2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2j}} 5 = \frac{1}{1+2j} 5$$

$$\text{Dus } U_{a2} = \frac{5}{2} (1-j) \text{ en } U_{b2} = 1-2j$$

$$\text{Dus } U_{ab} = U_{a2} - U_{b2} = \frac{1}{2}(3-j)$$

$$|U_{ab}| = \frac{\sqrt{10}}{2}; \arg U_{ab} = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } u_{ab} &= \frac{\sqrt{10}}{2} \cos\left(t - \arctan\frac{1}{3}\right), \left(0 < \arctan\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

2.

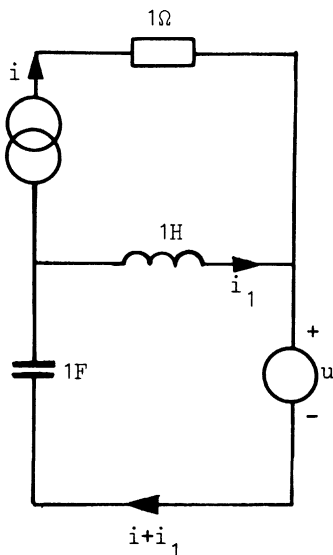


Fig. 63

Gegeven: $i = \sin(2t)$, $u = \sqrt{2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$. Gevraagd: Bepaal i_1 .

Oplossing: Evenals bij het vorige probleem verschuiven wij de tijdsvoorsprong en nemen wij de complexe stroom reëel: $I = 1$. Dan is $U = 1 + j$.

$$-U = (I + I_1) \frac{1}{2j} + 2j I_1$$

$$\text{dus } -U = \frac{I}{2j} + I_1 \left(\frac{1}{2j} + 2j\right) = -\frac{1}{2}j I + \frac{3}{2}j I_1,$$

$$I_1 = \frac{1}{3} I + \frac{2}{3} jU = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} j (1+j)$$

$$= -\frac{1}{3} (1-2j)$$

$$\text{dus } i_1 = -\frac{1}{3} \sqrt{5} \sin (2t - \arctan 2) \quad 0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} .$$

4.6. Vermogen

Wij definiëren de complexe effectieve waarden door de relaties

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I , \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U .$$

Alle betrekkingen van § 4.5 kunnen dan in deze grootheden worden uitgedrukt zonder verandering van gedaante. Bijvoorbeeld,

$$\Sigma I_k \text{ eff} = 0 , \quad \Sigma U_l \text{ eff} = 0 ,$$

$$U_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}} \quad \text{en} \quad I_{\text{eff}} = Y U_{\text{eff}} .$$

In geval van het vermogen echter, ligt het wat anders. Wij hebben in § 3.4.2 reeds gezien dat het (momentele) vermogen bij een reële stroom en spanning is

$$p(t) = u(t) i(t) = |U| |I| \sin (\omega t + \phi_1) \sin (\omega t + \phi_2) ,$$

waarin $\phi_1 = \arg U$ en $\phi_2 = \arg I$.

Wij willen nu het resultaat van § 3.8.3 afleiden met behulp van complexe grootheden. Het gemiddelde vermogen P is

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \{ |U| |I| \sin (\omega t + \phi_1) \sin (\omega t + \phi_2) \} dt$$

De integrand is gelijk aan

$$\frac{1}{2j} (U e^{j\omega t} - U^* e^{-j\omega t}) \frac{1}{2j} (I e^{j\omega t} - I^* e^{-j\omega t})$$

$$= \frac{1}{4} (U I^* + U^* I - U I e^{2j\omega t} - U^* I^* e^{-2j\omega t}) .$$

Dan is

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \{ UI^* + U^* I - \frac{UI}{2j\omega\tau} (\exp\{2j\omega(t_0 + \tau)\} - \exp(2j\omega\tau)) \\
 &\quad - \frac{U^* I^*}{2j\omega\tau} (\exp\{-2j\omega(t_0 + \tau)\} - \exp(-2j\omega\tau)) \}. \\
 &= \frac{1}{4} (UI^* + U^* I) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (UI^*),
 \end{aligned}$$

aangezien $|\omega\tau| \rightarrow \infty$ als $\tau \rightarrow \infty$ en $|\exp(j\omega x)| = 1$.

Ook als wij het gemiddelde vermogen over een periode berekenen, volgt hetzelfde resultaat, daar $\exp\{2j\omega(t_0 + \tau)\} = \exp(2j\omega\tau) \exp(2j\omega t_0)$ en $\exp(2j\omega\tau) = 1$, wanneer $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = T$.

Wij hebben dan hetzelfde resultaat :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(UI^*) = \operatorname{Re}(U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(|U| |I| e^{j(\phi_1 - \phi_2)}) \\
 &= \frac{1}{2} |U| |I| \cos(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} |U| |I| \cos \phi,
 \end{aligned}$$

waarin ϕ het faseverschil tussen de stroom en de spanning is.

De factor $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ wordt de arbeidsfactor genoemd.

Deze is nul indien $\phi_1 - \phi_2 = \pi/2$, zoals voor een spoel en een condensator geldt:

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(j\omega L I I^*) = 0 \quad \text{respectievelijk,} \\
 P_C &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-j\omega C U U^*) = 0.
 \end{aligned}$$

De grootheid $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(UI^*)$ wordt ook het actieve vermogen genoemd. Het lijkt dan zinvol $\frac{1}{2} UI^*$ het complexe vermogen te noemen. Het imaginaire deel van het complexe vermogen, $\frac{1}{2} \operatorname{Im}(UI^*)$, heet dan het reactieve vermogen.

Wij schrijven

$$S = \frac{1}{2} UI^* = P + jQ = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} UI^*\right) + j \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2} UI^*\right)$$

waarin P het actieve vermogen en Q het reactieve vermogen zijn. *)

*) In internationaal verband is afgesproken dat het symbool S het zogenaamde schijnbaar vermogen aanduidt; complex vermogen wordt dan aangeduid met \underline{S} . Wij geven hier de voorkeur aan S voor complex vermogen en $|S|$ voor schijnbaar vermogen.

Men lette goed op dat, vooral bij de sterkstroomtechniek, zeer vaak met effectieve waarden gewerkt wordt en dat de aanduiding "eff" dan weggelaten wordt. De amplituden worden dan met \hat{I} en \hat{U} aangeduid. Bijna alle wisselstroom-meetinstrumenten worden voor effectieve waarden geijkt. Voor theoretische doeleinden zijn de amplituden $|U|$, $|I|$, echter meer geschikt en in dit college worden deze als hoofdparameters beschouwd.

Reactief vermogen is geen fysisch (omgezet in warmte) vermogen, maar een maat voor het verschil in de gemiddelde elektrische en magnetische energieën. Om dit te bewijzen maken wij gebruik van het theorema van Tellegen. Ten overvloede wordt opgemerkt dat het theorema een gevolg is van de wetten van Kirchhoff, waaraan ook de complexe stromen en spanningen beantwoorden.

Wij veronderstellen dat het netwerk opgebouwd is uit spanningsbronnen, stroombronnen, weerstanden, condensatoren en spoelen. Met de gebruikelijke tekenafspraken van § 2.2. volgt:

$$\frac{1}{2} \sum_b U_b I_b^* + \frac{1}{2} \sum_r U_r I_r^* + \frac{1}{2} \sum_l U_l I_l^* + \frac{1}{2} \sum_c U_c I_c^* = 0,$$

waarin de letters b, r, l, c betrekking hebben op de bronnen, resp. weerstandstakken, spoelen en condensatoren. Maar

$$U_r I_r^* = R_r I_r I_r^*, \quad U_l I_l^* = j\omega L_l I_l I_l^*, \quad U_c I_c^* = -j\omega C_c U_c U_c^*.$$

Nu is het opgeslagen magnetische energie in een spoel gelijk aan

$$\frac{1}{2} L_l i_l^2 = \frac{1}{2} L_l |I_l|^2 \sin^2(\omega t + \phi). \text{ De gemiddelde waarde hiervan is dus } \frac{1}{4} L_l |I_l|^2. \text{ Op dezelfde wijze is de gemiddelde waarde van de in een condensator opgeslagen elektrische energie gelijk aan } \frac{1}{4} C_c |U_c|^2.$$

Wij kunnen dan stellen dat het door de bronnen afgegeven complexe vermogen - hetgeen gelijk is aan het totaal door de andere takken opgenomen complexe vermogen - gelijk is aan

$$-\frac{1}{2} \sum_b U_b I_b^* = \frac{1}{2} \sum_r R_r |I_r|^2 + \frac{1}{2} j\omega \sum_l L_l |I_l|^2 - \frac{1}{2} j\omega \sum_c C_c |U_c|^2 =$$

= $P + 2 j\omega (W_m - W_e)$, waarin W_e de gemiddelde totaal elektrische en W_m

de gemiddelde totaal magnetische energieën voorstellen.

Hieruit volgt dat $Q = 2\omega (W_m - W_e)$.

Opmerkingen:

1. Het complexe vermogen wordt soms met $\frac{1}{2} U^* I$ aangeduid. In zo'n geval is het reactieve vermogen dan $\frac{1}{2} \text{Im}(U^* I) = -2\omega (W_m - W_e)$.

Dit verschil van teken is niet significant. Reactief vermogen is geen fysisch vermogen en er is geen principiële reden om een voorkeur voor het ene of het andere teken van $\pm 2\omega (W_m - W_e)$ te geven. Echter om ver-

warring uit te sluiten wordt er gestandaardiseerd op de vorm $\frac{1}{2} U I^*$.

In de energietechniek wordt er meestal gewerkt met inductieve belastingen, d.w.z. impedanties, waarvan de spanning in fase voor t.o.v. de stroom is en het faseverschil kleiner dan 90° is. Onder deze omstandigheden is het reactieve vermogen positief.

2. De in een spoel opgeslagen energie is $\frac{1}{4} L |I|^2 \{1 - \cos(2\omega t + 2\phi)\}$, welke met een hoekfrequentie 2ω tussen de waarden 0 en $\frac{1}{2} L |I|^2$ oscilleert. Het momentele vermogen is $\frac{1}{2} \omega L |I|^2 \sin(2\omega t + 2\phi)$, hetwelk met een hoekfrequentie 2ω tussen $\pm \frac{1}{2} \omega L |I|^2$ oscilleert. Hetzelfde resultaat geldt voor een condensator, na vervanging van L door C en I door U.

3. De grootheid $\frac{1}{2} |U| |I| = |U_{\text{eff}}| |I_{\text{eff}}|$ wordt schijnbaar vermogen genoemd. Het schijnbaar vermogen wordt uitgedrukt in volt ampère (VA). Het reactief vermogen wordt uitgedrukt in var (met kleine letters), een afkorting van volt ampère réactive.

4. Bestaat een stroom uit twee componenten: $i = i_1 + i_2$, en vloeit deze stroom door een weerstand R, dan geldt voor het gemiddelde vermogen in het algemeen niet: $P = P_1 + P_2$, waarin P_1 het vermogen is tengevolge van i_1 en P_2 het vermogen t.g.v. i_2 .

Hier geldt dus niet het superpositiebeginsel. Bijvoorbeeld door een weerstand van R ohm vloeit een stroom van $+2A$ en een stroom van $-2A$, dus samen nul ampère. Het totale vermogen is nul, terwijl de vermogens van de deelstromen niet nul zijn. In bepaalde gevallen geldt echter wél het superpositiebeginsel voor vermogens. Eén zo'n geval komt voor bij sinusvormige stromen met ongelijke frequenties.

Stel $i_1 = |I_1| \cos(n\omega t + \alpha)$ en $i_2 = |I_2| \cos(m\omega t + \beta)$; n en m zijn gehele getallen: $n > 0$ en $m > 0$, verder is $n \neq m$.

Stel $i = i_1 + i_2$.

Deze stroom i vloeit door een weerstand R . Dan is het totale gemiddelde vermogen:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{R}{T} \left\{ \int_0^T i_1^2 dt + \int_0^T i_2^2 dt + 2 \int_0^T i_1 i_2 dt \right\}$$

waarin $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Beide stromen zijn periodiek met periode T .

Wij zullen nu bewijzen dat $\int_0^T i_1 i_2 dt$ nul is.

Nu is

$$i_1 i_2 = \frac{1}{4} \left(I_1 \exp\{j(n\omega t + \alpha)\} + I_1^* \exp\{-j(n\omega t + \alpha)\} \right) \times \\ \times \left(I_2 \exp\{j(m\omega t + \beta)\} + I_2^* \exp\{-j(m\omega t + \beta)\} \right).$$

Uitwerking van dit produkt levert een som van exponentiële functies op waarvan de exponenten niet nul zijn. De gemiddelde waarde over een periode van ieder zo'n term is nul.

Voorbeeld: $i = 6 \cos 3t + 4 \cos 29t$, $R = 5\Omega$

$$P = \frac{1}{2}(6^2 + 4^2)5 = 130 \text{ W.} \quad \omega = 1, n = 3, m = 29.$$

Opgave: Controleer de juistheid van de bovengemaakte beweringen en schrijf het bewijs van de stelling dat het gemiddelde vermogen van de totale stroom gelijk is aan de som van de gemiddelde vermogens van iedere componentstroom volledig uit. Op welk punt in het bewijs wordt er essentieel gebruik gemaakt van de voorwaarde $m \neq n$? Wat gebeurt er als de twee frequenties ω_1 en ω_2 zijn, waarbij $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ geen rationeel getal is?

4.7. Wijzerdiagrammen

Wij hebben het woord wijzer reeds genoemd in verband met de voerstraal-representatie van een sinus-functie en ook in verband met de afbeelding van een complex getal in het complexe vlak. Wij zullen nu wat dieper op deze stof ingaan en in het bijzonder de toepassing op het oplossen van netwerkproblemen behandelen.

Wij kunnen de complexe stroom en de complexe spanning van een netwerk als een wijzer voorstellen (fig. 64).

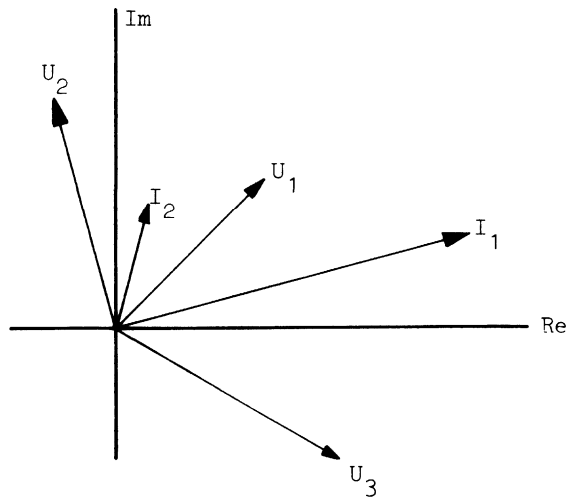


Fig. 64

Het is echter niet doenlijk uit zo'n diagram van wijzers de spanning over een willekeurige tak in het netwerk rechtstreeks te bepalen wanneer slechts een deel van de takstromen en spanningen bekend is. Wij kunnen dit bezwaar ondervangen als wij uitgaan van de complexe knooppuntspotentialen.

De knooppuntspotentialen veranderen sinusvormig met de tijd zodat wij iedere knooppuntspotentiaal als de som van twee complexe exponentiële grootheden kunnen beschouwen, nl. $\frac{1}{2} V e^{\lambda t} + \frac{1}{2} V^* e^{\lambda^* t}$.

Wij kunnen dan het getal V door een punt in het complexe vlak voorstellen.

Aan ieder knooppunt in het netwerk kennen wij een letter of een cijfer toe. De corresponderende complexe potentiaal wordt afgebeeld in het complexe vlak en met hetzelfde symbool aangeduid. Een willekeurige spanning

tussen knooppunten A en B wordt dan voorgesteld door een wijzer getekend tussen A en B in het complexe vlak en gericht van B naar A wanneer de spanning $U_{AB} = V_A - V_B$ wordt bedoeld (fig. 65).

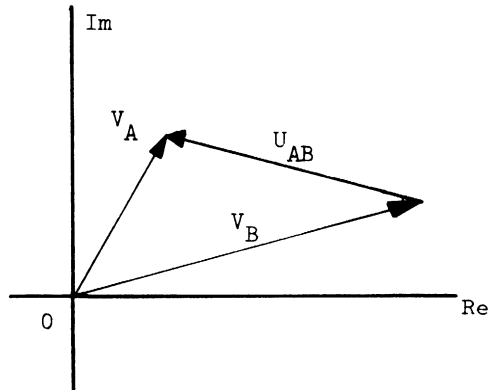


Fig. 65

Het voordeel van deze afspraak is dat als de potentialen V_A , V_B door wijzers worden voorgesteld, op de gebruikelijke wijze gericht van de oorsprong naar A resp. B, dan beantwoorden de wijzers V_A , V_B en $V_A - V_B$ aan de regel voor de vector-som. De oorsprong in zo'n diagram komt overeen met de potentiaal nul. Dit punt kan wel of niet overeenkomen met een knooppunt in het netwerk. Als aan iedere knooppuntspotentiaal een (complexe) constante erbij wordt opgeteld, dan verplaatst zich de getekende figuur in het complexe vlak, maar de onderlinge afstanden en hoeken blijven ongewijzigd. Daar alleen de onderlinge ligging van de knooppunten van belang is voor het bepalen van alle takstromen en spanningen is het niet nodig de assen in het diagram te tekenen.

Ook de oriëntatie van de figuur is niet belangrijk, aangezien wij alle spanningen en stromen met dezelfde complexe constante kunnen vermenigvuldigen zonder de relaties tussen de spanningen en stromen onderling te storen. Zo'n vermenigvuldiging komt overeen met een vergroting van de figuur gelijk aan de modulus van het getal en een draaiing van de figuur door een hoek gelijk aan het argument van het getal. Deze aspecten komen

naar voren bij de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 1:

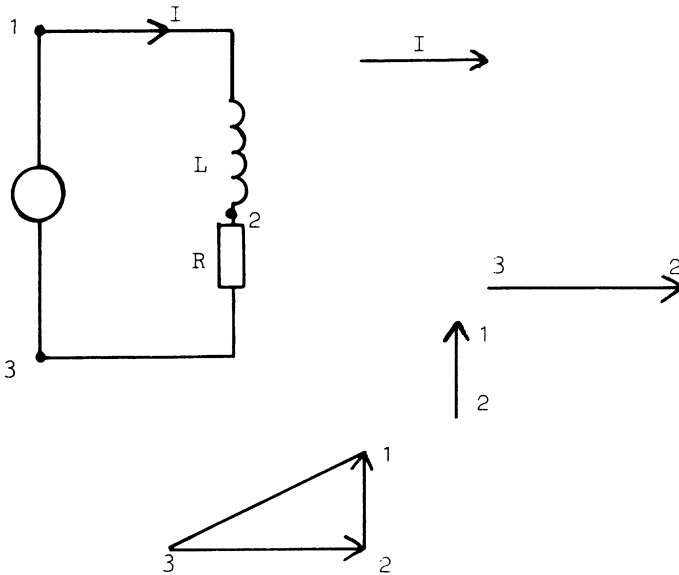


Fig. 66

Wij kiezen de stroom I reëel en positief (nogmaals: dit is niet essentieel, maar als de stroom éénmaal zo gekozen is ligt de oriëntatie van het wijzerdiagram vast).

Dan is U_{23} in fase met I en is U_{12} 90° in fase voor t.o.v. I . Samenvoeging van deze wijzers geeft het complete spanningsdiagram. De lengten van de wijzers moeten wel uit de elementwaarden worden berekend. Is bv. $R = 2\Omega$ en $\omega L = 1\Omega$, dan is $|U_{23}| = 2|U_{12}|$.

Voorbeeld 2:

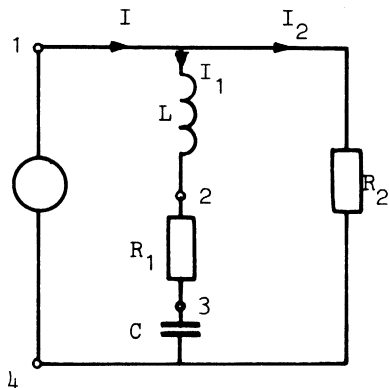
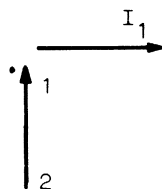


Fig. 67

Ga uit van de wijzer I_1 .

Daaruit volgt U_{12} .



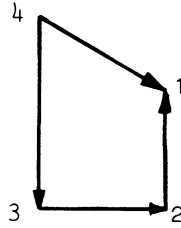
en U_{23}



en U_{34} .

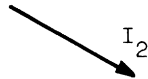


Samenvoeging geeft:

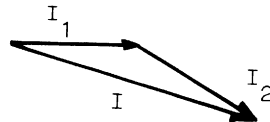


Hiermee is U_{14} bekend,

dus ook I_2 .



Dit levert het stroom-
diagram op.



Soms is een korte berekening vooraf onvermijdelijk.

Voorbeeld 3:

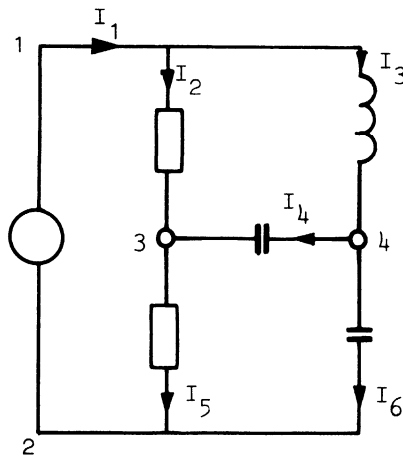


Fig. 68

Voor deze brugschakeling moet men eerst m.b.v. de complexe rekenwijze enkele spanningen of stromen berekenen. Pas daarna kan men het wijzerdiagram construeren.

Voorbeeld 4:

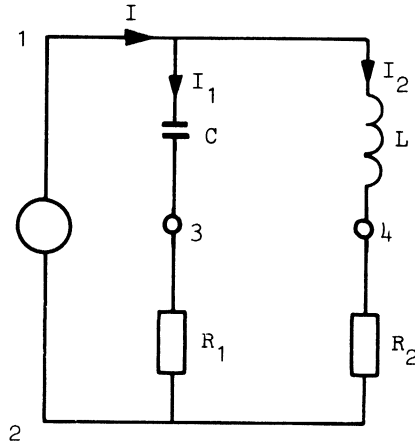
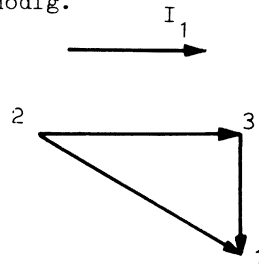


Fig. 69

In dit voorbeeld is een hulpconstructie nodig.

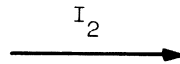
Ca uit van I_1 .

Daaruit volgt U_{13} en U_{32} .

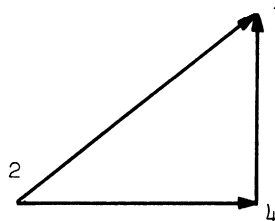


Hiermee is U_{12} . Het is nog niet mogelijk I_2 te vinden.

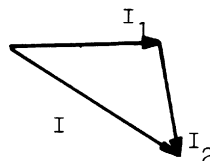
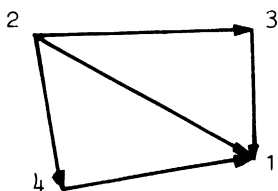
Daartoe gaan wij los van het bovenstaande uit van I_2 .



Wij vinden dan U_{14} en U_{42} .

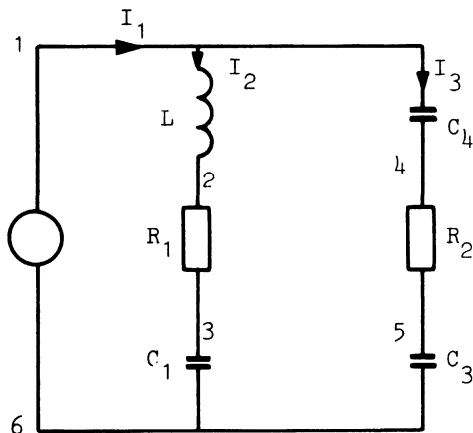


Opnieuw is U_{12} gevonden. Door de laatste tekening te verkleinen en te draaien en aan het eerst gevonden wijzerdiagram aan te passen, vinden wij (met I_2 op dezelfde wijze verkleind en gedraaid):



Het is in dit geval nog mogelijk de wijzerdiagrammen rechtstreeks te vinden: Ga uit van U_{12} . Nu staan de wijzers U_{13} en U_{32} loodrecht op elkaar. M.a.w. U_{12} is de diameter van een cirkel waarop het punt 3 ligt. Ook het punt 4 ligt op de cirkel. Door onderzoek van de onderlinge fasen kan men de wijzerdiagrammen rechtstreeks vinden.

Fig. 70



Opgave:

Ga uit van I_2 . Hiermee liggen de punten 1, 2, 3, 6 vast. Daarmee is U_{16} bekend. Ga opnieuw uit van I_3 . Hiermee zijn de punten 1, 4, 5 te vinden, waardoor weer U_{16} bekend is. Vergroot en draai één der diagrammen, totdat beide wijzers U_{16} samenvallen. De constructie wordt aan de student over-

gelaten.

Het is ook mogelijk de hele theorie van wijzerdiagrammen te baseren op maasstromen i.p.v. knooppuntspotentialen. Daartoe gaan wij uit van de sinusvormige takstromen waarvan ieder op te vatten is als de som van twee complexe stromen. Iedere complexe takstroom kan worden uitgedrukt als het verschil tussen twee complexe maasstromen. De complexe grootheden worden door punten in het complexe vlak afgebeeld. Een takstroom wordt dan voorgesteld als een wijzer die twee van deze punten verbindt en zo gericht van B naar A dat de desbetreffende takstroom gelijk is aan $J_A - J_B$, waarin de maasstromen met het symbool J worden aangeduid. Hieruit kunnen alle gewenste stroom- en spanningsrelaties worden gevonden. Deze methode is niet principiëel moeilijker dan de methode gebaseerd op knooppuntspotentialen. Zij wordt echter weinig gebruikt. Bovendien zijn er enkele punten in de fundering die een nadere toelichting eisen, welke alleen te geven is nadat de stof van het college Elektrische Netwerken II is bestudeerd.

4.8. De delen van immittanties.

Aan de reële en imaginaire delen van immittantie-functies worden speciale namen gegeven. Wij schrijven

$$Z(j\omega) = R(\omega) + j X(\omega).$$

$$Y(j\omega) = G(\omega) + j B(\omega),$$

waarbij tot uitdrukking komt dat al deze grootheden functies van ω zijn. Dan heten $R(\omega)$ en $G(\omega)$ de resistantie, respectievelijk conductantie. De grootheden $X(\omega)$ en $B(\omega)$ heten de reactantie, respectievelijk susceptantie. Al deze grootheden worden uitgedrukt in ohm, resp. in siemens.

Daar $Z = \frac{1}{Y}$, is

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2}.$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}.$$

Opgemerkt dient te worden dat van een gegeven immittantie de resistantie en conductantie gelijke tekens hebben terwijl de reactantie en susceptantie van ongelijk teken zijn.

Opgave: Bewijs m.b.v. het theorema van Tellegen en de eigenschappen van het complexe vermogen dat $R(\omega) \geq 0$ en $G(\omega) \geq 0$. Wat is de relatie tussen het reactieve vermogen en $B(\omega)$, $X(\omega)$?

4.9. Polaire figuren

Variëren we in een netwerk de frequentie ω of de waarde van een netwerkelement (bv. de grootte van een condensator) dan zal de complexe stroom in (of de complexe spanning over) een bepaalde tak veranderen.

De puntverzameling van een dergelijk complex getal heet een polaire figuur. We hebben dan te maken met functies van de vorm

$$H = f(\rho).$$

Hierin kan H zijn een spanning of stroom, een immittantie, een spannings- of stroomverhouding, enz. De reële parameter ρ kan zijn de frequentie ω , een weerstand R , een zelf-inductie L , een capaciteit C , enz.

Een voorbeeld van een polaire figuur is getekend in fig. 71.

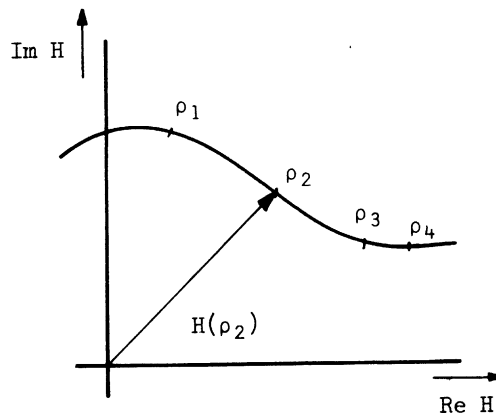


Fig. 71

Voor iedere waarde van ρ is er één (complexe) waarde van $f(\rho)$, met een reëel en een imaginair deel. Deze delen zijn de coördinaten van een punt

in het complexe vlak. Als ρ variëert wordt er een kromme in het complexe vlak beschreven. Langs de meetkundige plaats van $H = f(\rho)$ kan men een schaalverdeling van ρ aanbrengen (de punten ρ_1, ρ_2, ρ_3 in fig. 71). Een eenvoudig voorbeeld is de impedantie $R + j\omega L$ (fig. 72).

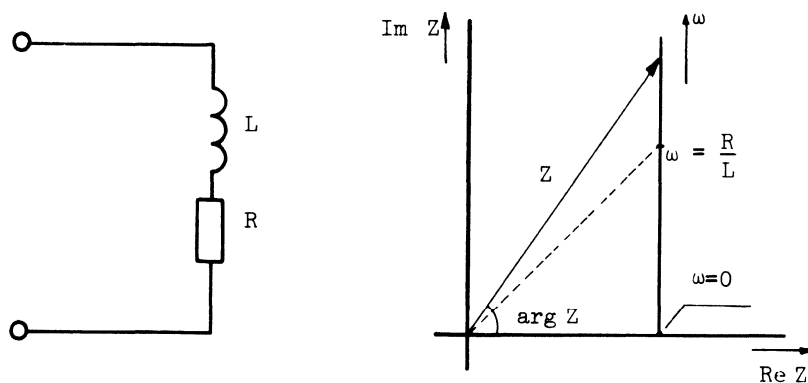


Fig. 72

Variëren wij ω , dan is $\text{Re } Z = R = \text{constante}$, terwijl $0 \leq \text{Im } Z < \infty$ als $0 \leq \omega < \infty$. De polaire figuur is dus een rechte lijn evenwijdig aan de imaginaire as. Door een eenvoudige meting kan men uit de figuur de modulus en het argument van Z bepalen.

In vele gevallen is $f(\rho)$ een bilineaire functie van ρ , zodat

$$H = \frac{a + b\rho}{c + d\rho}, \text{ met } -\infty < \rho < \infty.$$

Zo'n functie stelt altijd een cirkel voor, met als speciaal geval een cirkel met oneindige straal, d.w.z. een rechte. In de praktijk kan men de cirkel bepalen als drie punten bekend zijn, bv. voor $\rho = 0, \infty, 1$. Het kan ook zijn dat ρ niet alle reële waarden mag aannemen. In zo'n geval is de polaire figuur een cirkelboog, waarvan de eindpunten aan de grenswaarden van ρ corresponderen.

Wij zullen nu bewijzen dat de meetkundige plaats van $H = f(\rho)$ een cirkel is en tevens de straal en het middelpunt bepalen. Wij drukken eerst ρ in H uit.

$$\rho = \frac{cH - a}{b - dH} = \frac{c^* H^* - a^*}{b^* - d^* H^*},$$

aangezien ρ reëel is, d.w.z. $\rho = \rho^*$.

Dan is $(cH - a)(b^* - d^* H^*) - (c^* H^* - a^*)(b - dH) = 0$.

Dus $(c^* d - cd^*) HH^* + (b^* c - a^* d) H - (bc^* - ad^*) H^* + a^* b - ab^* = 0$.

Indien $c^* d = cd^*$, dan is de coëfficiënt van HH^* nul en stelt de vergelijking een rechte voor. De snijpunten met de assen zijn gemakkelijk te bepalen uit de relaties

$$\text{Im } H = 0, \text{ dus } \text{Re } H = \frac{-\text{Im}(a^* b)}{\text{Im}(b^* c - a^* d)},$$

$$\text{en } \text{Re } H = 0, \text{ dus } \text{Im } H = \frac{-\text{Im}(a^* b)}{\text{Re}(b^* c - a^* d)}.$$

Indien $c^* d \neq cd^*$, dan is

$$HH^* + \frac{b^* c - a^* d}{c^* d - cd^*} H - \frac{bc^* - ad^*}{c^* d - cd^*} H^* + \frac{a^* b - ab^*}{c^* d - cd^*} = 0.$$

Wij kunnen deze vergelijking schrijven als

$$|H-p|^2 (H-p) (H^*-p^*) = HH^* - pH^* - p^* H + pp^* = r^2.$$

Deze laatste vergelijking stelt een cirkel voor met straal r en middelpunt p .

Identificatie van de twee vergelijkingen levert het resultaat op:

$$p = \frac{bc^* - ad^*}{c^* d - cd^*} = \frac{bc^* - ad^*}{2j\text{Im}(c^* d)}$$

$$r^2 = \frac{ab^* - a^* b}{c^* d - cd^*} + pp^* = \frac{-(ab^* - a^* b)(c^* d - cd^*) + (bc^* - ad^*)(b^* c - a^* d)}{|c^* d - cd^*|^2}$$

De teller van deze uitdrukking is gelijk aan

$$-ab^* c^* d - a^* b c d^* + bb^* c c^* + aa^* d d^*.$$

Hieruit volgt $r = \frac{|ad-bc|}{2|\operatorname{Im}(c^*d)|}$. Voor het voorbeeld van fig. 73 geldt

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR}.$$

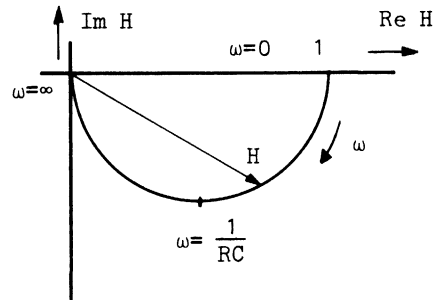
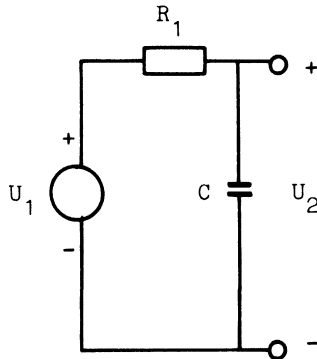


Fig. 73

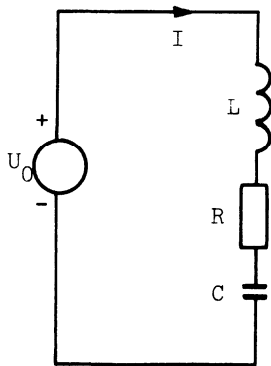
Dit is een bilineaire functie van ω . De figuur voor $\omega < 0$ is een spiegelbeeld van de figuur voor $\omega > 0$ t.o.v. de reële as als spiegel. Deze as is dus een diameter. Verder zijn de punten $\omega = 0$ en $\omega = \infty$ gemakkelijk te bepalen.

Opgaven: Reken het middelpunt en de straal na m.b.v. de boven afgeleide formules. Bepaal de polaire figuur voor $\frac{U_2}{U_1}$ met C als parameter.

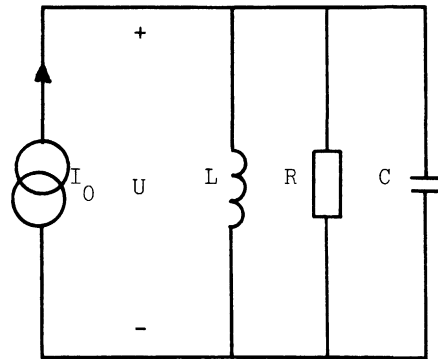
5. EIGENSCHAPPEN VAN VERSCHILLENDE NETWERKTYPEN.

5.1. Resonantie.

Wij zullen nu ingaan op de eigenschappen van een schakeling die in hoofdstukken 3 en 4 als rekenvoorbeeld is gebruikt (fig. 74a). Een andere schakeling met verwante eigenschappen is weergegeven in fig. 74b. Het is leerzaam de twee schakelingen gelijk te bekijken en de overeenkomst in de algebraïsche bewerkingen voor de twee schakelingen duidelijk naar voren te brengen.



(a)



(b)

Fig. 74

fig. 74a

$$Z(\lambda) = \lambda L + R + 1/\lambda C$$

Met $\lambda = j\omega$ volgt

$$Z(j\omega) = j(\omega L - 1/\omega C) + R$$

Bij de hoekfrequentie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, zijn $Z(\lambda)$ en $Y(\lambda)$ reëel; de reactantie

(susceptantie) is nul en de schakeling gedraagt zich als een eenvoudige weerstand.

Bovendien zijn

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

fig. 74b

$$Y(\lambda) = \lambda C + G + 1/\lambda L$$

$$Y(j\omega) = j(\omega C - 1/\omega L) + G$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$$

minimaal wanneer $\omega = \omega_0$ zodat

$$|I(j\omega)| = \left| \frac{U_0}{Z(j\omega)} \right| \quad |U(j\omega)| = \left| \frac{I_0}{Y(j\omega)} \right|$$

het maximum bereiken bij deze frequentie mits de bronsterkten U_0 en I_0 onafhankelijk van de frequentie zijn. Dit verschijnsel noemt men resonantie. In dit eenvoudige geval zijn niet alleen

$$|I(j\omega)| \quad |U(j\omega)|$$

maximaal maar zijn de spanning en stroom in fase.

In het algemeen spreekt men van fase-resonantie als bij een bepaalde frequentie ω_0 het faseverschil tussen sinusvormige grootheden in een netwerk nul is. Als bij een bepaalde frequentie ω_a de verhouding van de amplituden van twee sinusvormige grootheden in een netwerk maximaal of minimaal is, dan spreekt men van amplitude-resonantie. In het geval van de twee voorbeelden van fig. 74 is $\omega_0 = \omega_a$; in het algemeen is dit echter niet het geval. In de praktijk wordt vaak het woord resonantie zonder voorvoegsel gebruikt. Hiermede bedoelt men bijna altijd "fase-resonantie".

De functie $|I| = f(\omega)$ behorende bij fig. 74a is getekend in fig. 75.

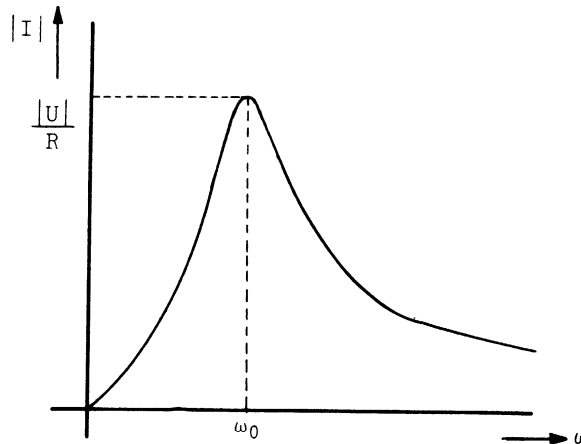


Fig. 75

Dezelfde grafiek geldt ook voor fig. 74b indien wij $|I|$ vervangen door $|U|$ en R door G .

Voor de serieschakeling is $\arg Z(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$ wanneer $\omega = 0$ en is

$\arg Z(j\omega) = +\frac{\pi}{2}$ wanneer $\omega = \infty$. De kromme van fig. 76 volgt hieruit, daar

$$\arg \left(\frac{I}{U_0} \right) = -\arg Z.$$

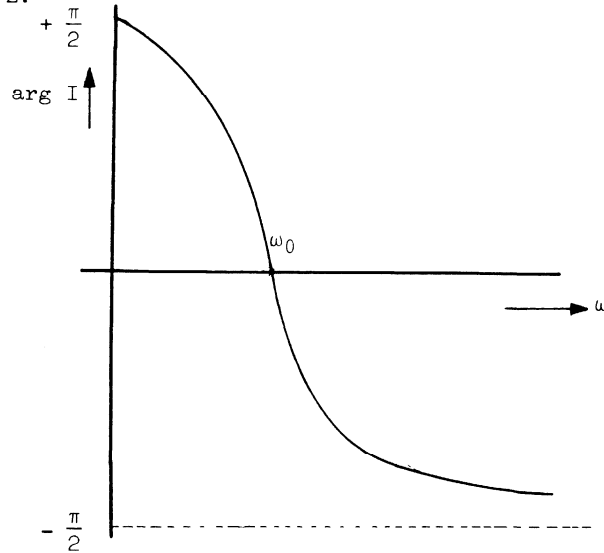


Fig. 76

Voor de parallelschakeling van fig. 74b geldt dezelfde kromme indien wij I en U verwisselen. De twee krommen van fig. 75 en fig. 76 heten resonantiekrommen. De polaire figuur van de functie $\frac{I}{U_0}$ in fig. 74a kan verdienstelijk zijn bij het oplossen van bepaalde problemen.

Hoewel de functie $\frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$ niet bilineair in ω is, kunnen wij er

een bilineaire functie van maken door de substitutie $v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$.

Deze nieuwe parameter heet de verstemming. De impedantiefunctie is dan ge-

$$\text{lijk aan } R + j \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C \omega_0 L} \right) = R + j \omega_0 L v.$$

De polaire figuur is dus een cirkel (een complete cirkel daar v zowel positief als negatief kan zijn). De polaire figuur is getekend in fig. 77 en het verband tussen v en ω is weergegeven in fig. 78.

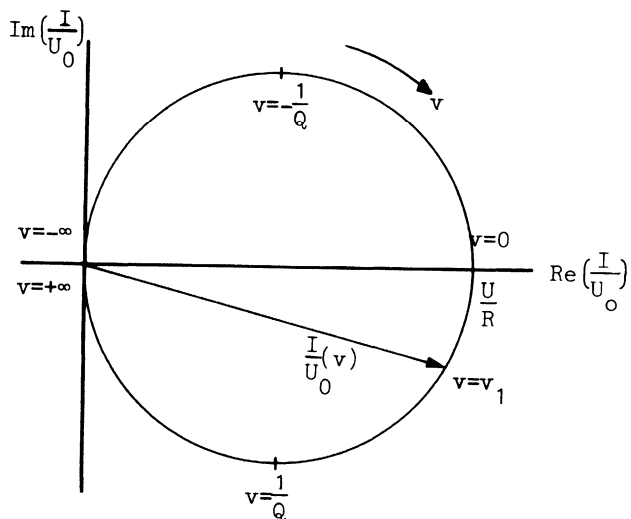


Fig. 77

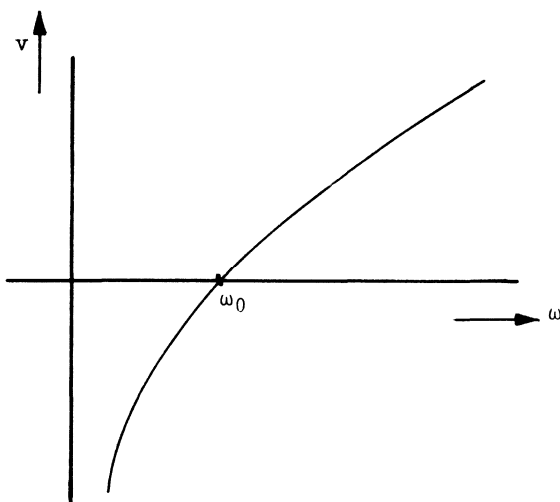


Fig. 78

In figuur 77 is gebruik gemaakt van een andere parameter Q die wij de kwaliteitsfactor* noemen. Tot iedere fysische spoel behoort een equivalente serie-weerstand t.g.v. de weerstand van de draad en t.g.v. energieverliezen in de magnetische kern. Wij definiëren de kwaliteit van de

* De termen kwaliteit en kringkwaliteit worden ook voor dit begrip gebruikt.

spoel als $\frac{\omega L}{R}$, zijnde een maat voor de verhouding van de gemiddelde magnetische energie tot de energie die in één periode in warmte wordt omgezet (d.w.z. het product van het gemiddelde vermogen en één periode).

Een oneindige Q komt overeen met een ideale spoel. De waarde van Q bij fase-resonantie wordt aangeduid met Q_0 .

Eveneens: tot iedere fysische condensator behoort er een equivalente geleiding t.g.v. energieverliezen in het diëlectricum en t.g.v. de eindige weerstand van de toevoerdraden en de platen.

Wij definiëren de kwaliteitsfactor als $\frac{\omega C}{G}$ en duiden de waarde van Q bij faseresonantie met Q_0 aan.

Wij spreken van de kwaliteit van een spoel of condensator, of de kwaliteit van een resonantiekring (fig. 74).

In het laatste geval is de weerstand (geleiding) die in de formule van Q verschijnt niet alleen de equivalente verlies-weerstand (geleiding) maar de totale serieweerstand (parallelgeleiding) in de keten. Met de twee parameters Q_0 en v kunnen wij de immittantie in de volgende alternatieve vormen uitdrukken:

fig. 74a

$$Z = R + jv\sqrt{\frac{L}{C}} = R(1 + jvQ_0),$$

$$\text{waarbij } Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\text{Verder is } Z = \omega_0 L \left(\frac{1}{Q_0} + jv \right)$$

fig. 74b

$$Y = G + jv\sqrt{\frac{C}{L}} = G(1 + jvQ_0),$$

$$Q_0 = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$Y \text{ is } \omega_0 C \left(\frac{1}{Q_0} + jv \right).$$

De parameters Q_0 en v zijn dimensieloos - ωL en R hebben de dimensie van Ω - en zijn vooral nuttig bij het vergelijken van verschillende resonantieketens. Men lette goed op de verschillende uitdrukkingen voor Q_0 bij de serie- en parallelketens. Formeel lijkt de Q_{serie} de inverse van de Q_{parallel} te zijn. De relatie is echter schijn, daar de L , C , R verschillende waarden in de twee schakelingen kunnen hebben. Een hoge Q_0 in de serieschakeling gaat gepaard met een kleine weerstand; in de parallel-

schakeling daarentegen gaat een hoge Q_0 gepaard met een kleine geleiding, d.w.z. een grote weerstand.

Wij zullen nu verder ingaan op de vorm van de resonantiekrommen. Daartoe bepalen wij de hoekfrequenties die overeenkomen met een waarde van $|I|$ gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2}} |I|_m$, waarin $|I|_m$ de maximale waarde van $|I|$ is. Wij noemen het frequentieinterval $\omega_2 - \omega_1$ de bandbreedte. Ook de corresponderende grootheid, uitgedrukt in Hz, $\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2\pi} = f_2 - f_1$ wordt de bandbreedte genoemd (fig. 79).

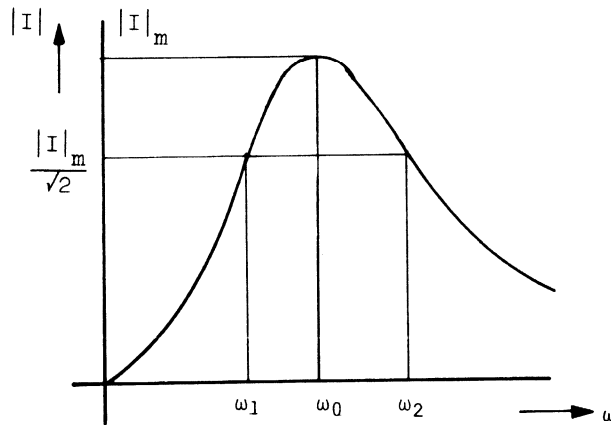


Fig. 79

$$\text{Dan geldt: } \frac{|I|_m}{|U_0|} = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|I|_m}{|U_0|} = \frac{1}{|R(1 + jvQ_0)|}$$

$$\text{Dus is } R^2(1 + v^2Q_0^2) = 2R^2,$$

$$\text{d.w.z. } v = \pm \frac{1}{Q_0}.$$

$$\text{Wij hebben dan } \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} = -\frac{1}{Q_0} \quad \text{en} \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = \frac{1}{Q_0}.$$

$$\text{d.w.z. } \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q_0} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) - 1 = 0, \text{ en } \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right) \frac{1}{Q_0} - 1 = 0.$$

Alleen de positieve wortels zijn van belang in dit probleem. Wij vinden

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{2} \{-1/Q_0 + \sqrt{1/Q_0^2 + 4}\}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2} \{1/Q_0 + \sqrt{1/Q_0^2 + 4}\}.$$

De relatieve bandbreedte $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ is dus $\frac{1}{Q_0}$ en de absolute bandbreedte

ω_0/Q_0 . Indien $Q_0 \gg 1$, dan volgt door een machtreeksontwikkeling in $1/Q_0$

$$\text{dat } \omega_1 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right), \quad \omega_2 \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right).$$

De frequenties ω_1, ω_2 heten, vooral bij elektronische toepassingen, de afsnijfrequenties; de corresponderende ordinaten heten vaak de 3db-punten.

Vraag: Wat zou de oorsprong van deze benaming kunnen zijn? (zie § 3.8.6.).

$$\text{Het argument van } \frac{I}{U_0} \text{ is gelijk aan } -\arctan(vQ_0) = \pm \frac{\pi}{4} \text{ als } \omega = \omega_1,$$

respectievelijk ω_2 .

Deze resultaten vormen de basis van verschillende meettechnieken alsmede de basis van selectieve elektronische schakelingen.

Figuur 80 geeft een voorbeeld van een resonantiekromme met hoge Q_0 d.w.z. geringe bandbreedte. De kromme is bijna symmetrisch over een groot gebied van de mogelijke waarden van $|I|$.

Wanneer de krommen worden getekend met v als onafhankelijke variabele, in plaats van ω , resulteert er een symmetrische kromme over het complete interval voor $|I|$ en een asymmetrische kromme voor $\arg I$. Dit komt doordat de functie $\sqrt{R^2(1 + v^2Q_0^2)}$ ongewijzigd blijft als v door $-v$ wordt vervangen, terwijl $\arctan(vQ_0)$ van teken wisselt als v door $-v$ wordt vervangen.

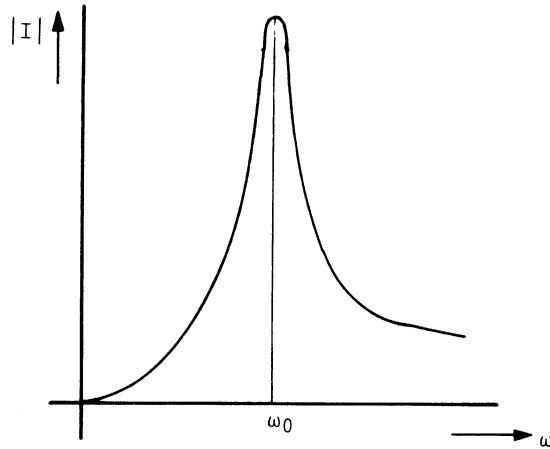


Fig. 80

Wij kunnen ook symmetrische, resp. asymmetrische, krommen verkrijgen wanneer wij $\ln(\omega/\omega_0)$ als onafhankelijke variabele gebruiken. Dit is als volgt in te zien. Met $\ln(\omega/\omega_0) = \xi$, is

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = e^{\xi} - e^{-\xi}.$$

Verwisseling van ξ en $-\xi$ resulteert dan in de vervanging van v door $-v$, zodat de vorige argumentatie ook in deze situatie geldig is. Figuur 81 en 82 geven enige voorbeelden van resonantie-krommen met Q als parameter.

Wij zullen nu de spanningsverhouding $\frac{U_c}{U_0}$ in de schakeling van fig. 83 onderzoeken. Hoewel deze schakeling identiek is aan die van fig. 74a, is

$U_c(j\omega)$ een heel andere functie van ω dan $I(j\omega)$.

$$\frac{U_c}{U_0} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}, \quad \text{zodat} \quad \left| \frac{U_c}{U_0} \right| = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

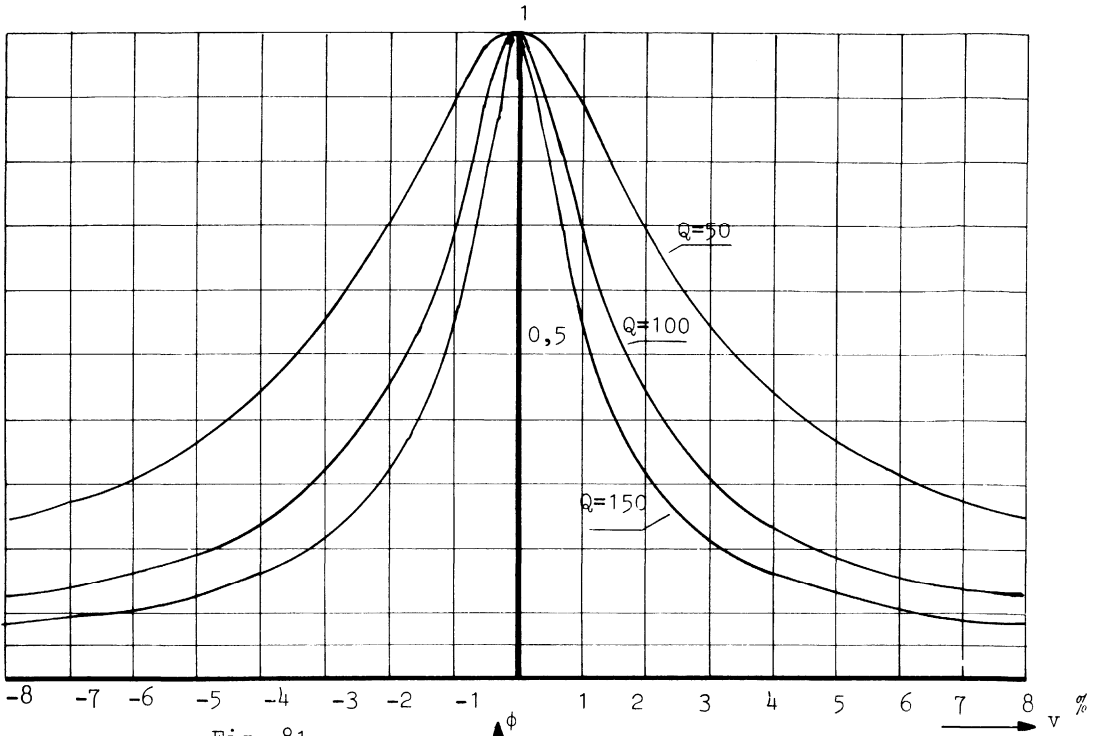


Fig. 81

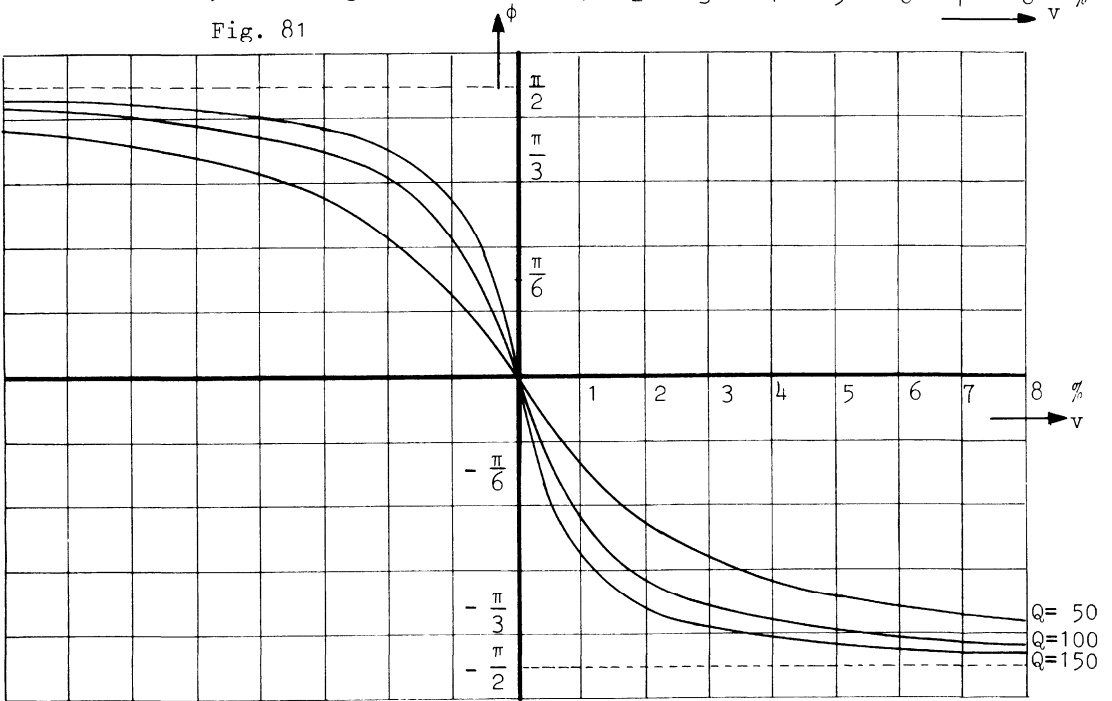


Fig. 82

$$\text{en } \arg\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

De resonantiekrommen zijn uit fig. 75 af te leiden als wij de functie $|I|$ delen door ωC en $\arg I$ verminderen met $\frac{\pi}{2}$ (fig. 84).

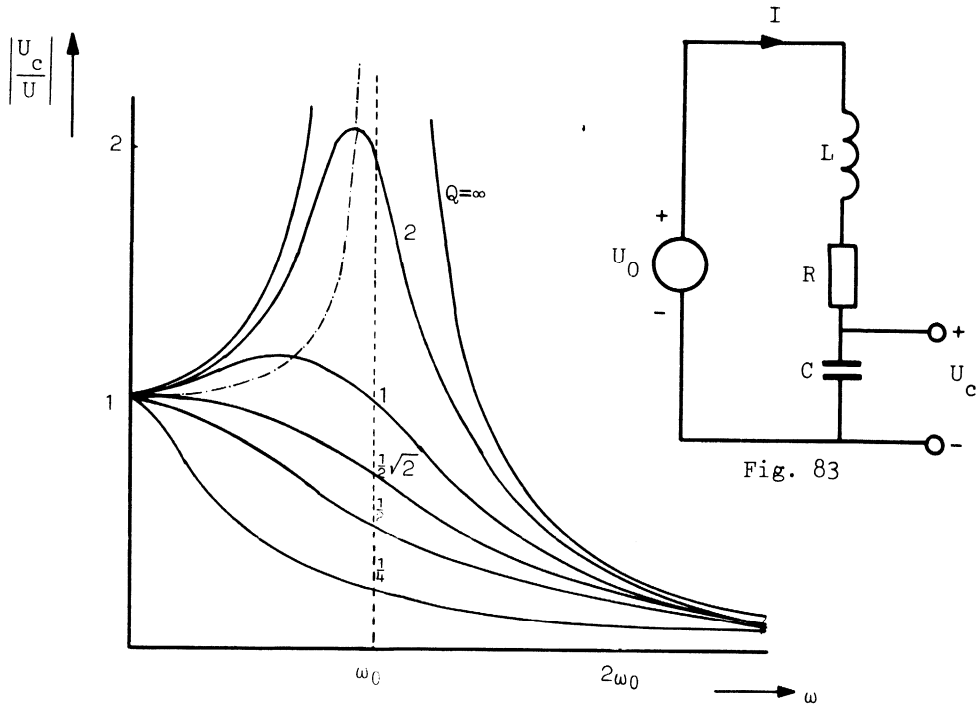


Fig. 84

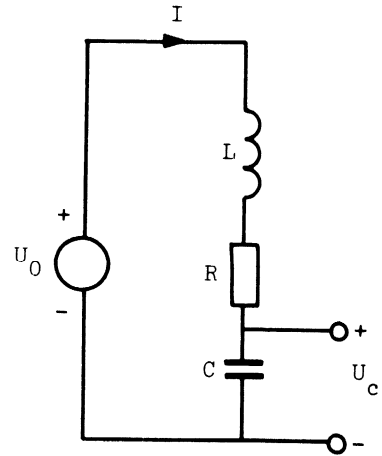


Fig. 83

Het is evident dat $U_c(0) = 1$ voor alle Q_0 , daar bij frequentie nul (gelijkstroom) de impedantie van de condensator oneindig is terwijl de impedantie van de weerstand eindig en van de zelf-inductie nul is. Het gevolg is dat de hele bronspanning over de condensator komt te staan.

Wij moeten nu onderzoeken bij welke frequentie $\left|\frac{U_c}{U_0}\right|$ maximaal is.

Dan is $\left|\frac{U_0}{U_c}\right|^2$ minimaal, zodat wij de corresponderende frequentie kunnen

bepalen door $\left| \frac{U_0}{U_c} \right|^2$ te differentiëren en de afgeleide gelijk nul te stellen.

In plaats van deze weg te volgen zullen wij een eenvoudige algebraïsche methode gebruiken.

In het onderhavige geval is

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_0}{U_c} \right|^2 &= \omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 (C^2 R^2 - 2LC) + 1 \\ &= (\omega^2 LC - (1 - \frac{CR^2}{2L}))^2 + 1 - (1 - \frac{CR^2}{2L})^2. \end{aligned}$$

Deze functie is minimaal wanneer de eerste kwadratische term nul is, mits ω dan reëel is.

$$\text{Dus } \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{CR^2}{2L}, \text{ d.w.z. } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}, \text{ mits } 2Q_0^2 > 1.$$

(Anders zou ω imaginair zijn). De minimale waarde van de functie is dan

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right)^2. \text{ Als } 2Q_0^2 < 1 \text{ is de functie minimaal wanneer de eerste}$$

kwadratische term minimaal is, d.w.z. bij $\omega = 0$.

$$\text{Derhalve is } \left| \frac{U_c}{U_0} \right| \text{ maximaal bij de frequentie } \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} \neq \omega_0.$$

Bij hoge Q_0 verschilt ω_a nauwelijks van ω_0 , bij lage Q_0 kan het verschil aanzienlijk zijn (fig. 84). De maximale waarde van

$$\left| \frac{U_c}{U_0} \right| \text{ is } \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right)^2\right)}} \approx Q_0.$$

Aan de andere kant, wanneer $\omega = \omega_0$ (de frequentie voor faseresonantie van de stroom en spanning in de schakeling), is

$$\left| \frac{U_c}{U_0} \right| = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q_0.$$

Dit is een exacte relatie in tegenstelling tot de benadering van

$$\left| \frac{U_c}{U_0} \right| \simeq Q_0 \text{ bij } \omega = \omega_a.$$

Wij hebben hier het verschijnsel van spanningsversterking - d.w.z. een uitgangsspanning die veel groter dan de ingangs(bron)spanning is - t.g.v. de resonantie. Dit verschijnsel wordt vaak toegepast in de elektrotechniek.

In fig. 85 worden verschillende schakelingen aangetoond waarin resonantie kan optreden.

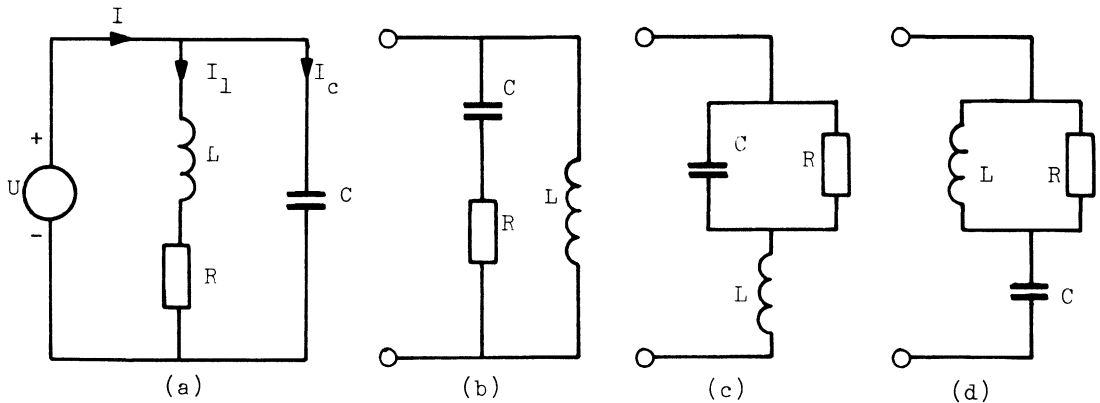


Fig. 85

Om een indruk van het gedrag van de schakeling van fig. 85a te krijgen zullen wij eerst de polaire figuur construeren. De admittantie $\frac{I}{U}$ van deze schakeling is $j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$. De polaire figuur volgt door ωC op te tellen bij de ordinaat van de polaire figuur van $\frac{1}{R + j\omega C}$. Figuur 86 resulteert. (Zie blz. 138).

Het is duidelijk dat ω_0 en ω_a verschillend zijn en dat $\omega_a > \omega_0$. Een exacte berekening volgt:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R}.$$

$$|Y| = \left(\frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 L^2 + R^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\arg Y = \arctan \frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC} - \arctan \frac{\omega L}{R} = \arctan \left(\frac{\omega CR^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C}{R} \right).$$

Wij kunnen de minimale waarde van $|Y|$ bepalen door $|Y|$ te differentiëren. Het is echter eenvoudiger om gebruik te maken van de volgende algebraïsche methode die bij soortgelijke problemen nuttig blijkt te zijn.

Eerst bekijken we de identiteit:

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2, \quad x > 0,$$

waaruit blijkt dat de som van een getal en zijn reciprook getal minimaal is wanneer het getal de eenheid is. Dit volgt uit het feit dat de som minimaal is wanneer de kwadratische term nul is.

Een generalisatie hiervan is de identiteit:

$$mx + \frac{n}{x+b} + k = \left(\sqrt{m(x+b)} - \sqrt{\frac{n}{x+b}} \right)^2 + 2\sqrt{mn} - mb + k, \text{ waarin } m, n, b, x > 0.$$

Deze functie is dus minimaal wanneer de kwadratische term nul is, d.w.z.

$$x = \sqrt{n/m} - b \text{ en de minimale waarde van de functie is dan } 2\sqrt{mn} - mb + k.$$

In het onderhavige geval hebben wij

$$|Y|^2 = \frac{\omega^4 L^2 C^2 - 2\omega^2 LC + 1 + \omega^2 C^2 R^2}{\omega^2 L^2 + R^2} = \omega^2 C^2 - \frac{2C}{L} + \frac{1/L^2 + 2R^2 C/L^3}{\omega^2 + R^2/L^2}.$$

Wij kunnen dus de volgende identificaties maken:

$$\omega^2 = x, \quad C^2 = m, \quad R^2/L^2 = b, \quad 1/L^2 + 2R^2 C/L^3 = n, \quad k = -2C/L.$$

Dan is $|Y|^2$ minimaal wanneer

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 + 2/Q_0^2} - \omega_0^2/Q_0^2$$

waarin $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ en $Q_0 = \omega_0 L/R$. De minimale waarde van $|Y|^2$ is

$$\frac{2C}{L} (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/2Q_0^2 - 1).$$

M.b.v. het binomium: $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1) x^2 + \dots$, met $x = \frac{2}{Q_0^2}$,

kunnen wij schrijven $|Y|^2 = \frac{C}{LQ_0^2} (1 - \frac{1}{Q_0^2} + \dots) \simeq \frac{C}{LQ_0^2}$, wanneer

$$Q_0 \gg 1, \quad = \omega^2 C^2 / Q_0^2.$$

Dus $|Y| \simeq \omega_0 C / Q_0 = \frac{1}{Q_0 \omega_0 L}$.

De corresponderende frequentie ω_a is $\omega_0 (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/Q_0^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^4}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q_0^4}\right).$$

Indien $Q_0 > 10$ is, is de frequentie van amplitude-resonantie praktisch niet te onderscheiden van ω_0 .

De frequentie van fase-resonantie wordt gegeven door $\arg Y = 0$,

$$\text{d.w.z. } \frac{\omega CR^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C}{R} = 0, \quad \text{of}$$

$$\omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - 1/Q_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right).$$

Deze frequentie is niet dezelfde als de frequentie van amplitude-resonantie. Het verschil is ongeveer $\frac{\omega_0}{2Q_0^2}$ wat praktisch te verwaarlozen is als

$Q_0 > 100$ is. De in deze paragraaf afgeleide formules vormen de basis van bepaalde meettechnieken: Q_0 kan worden bepaald door òf de bandbreedte òf

de admittantie bij amplitude-resonantie te meten. De frequentie van fase-resonantie kan bij hoge Q_0 zeer nauwkeurig worden bepaald, mits de fase-meter nauwkeurig is, aangezien het faseverschil tussen I en U zeer snel met de frequentie verandert. Dit volgt uit de betrekking

$$\omega \frac{d(\arg Y)}{d\omega} = \frac{\omega CR^2 - \omega L + 3 \omega^3 L^2 C}{R^2 + (\omega CR^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C)^2} \quad R \simeq 2 \omega L/R = 2 Q_0 \quad (\text{bij fase-}$$

resonantie), welke de fractionele verandering van het argument van Y met de frequentie aangeeft.

De admittantie van de schakeling van fig. 85b is

$$Y = \frac{1}{\lambda L} + \frac{1}{R + \frac{1}{\lambda C}}, \text{ welke uit de admittantie van de schakeling van fig. 85a}$$

kan worden afgeleid indien wij vervangen: $j\omega$ door $1/j\omega$, L door $1/C$ en C door $1/L$. Dit houdt in dat $j\omega_0$ wordt vervangen door $1/j\omega_0$ terwijl Q_0 onveranderd blijft. Wij vinden dan dat de frequentie van amplitude-resonantie wordt gegeven door

$$\omega_a = \omega_0 (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/Q_0^2)^{-\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 (1 + \frac{1}{4Q_0^4}).$$

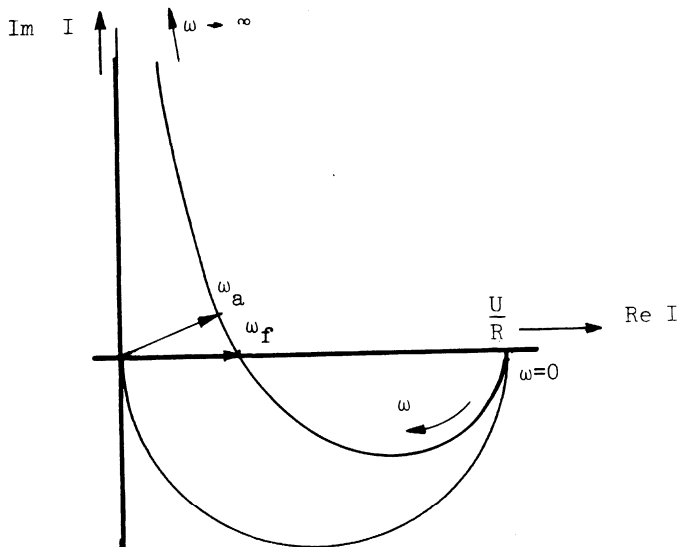


Fig. 86

$$\omega^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 + 2/Q_0^2} - \omega_0^2/Q_0^2$$

waarin $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ en $Q_0 = \omega_0 L/R$. De minimale waarde van $|Y|^2$ is

$$\frac{2C}{L} (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/2Q_0^2 - 1).$$

M.b.v. het binomium: $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1) x^2 + \dots$, met $x = \frac{2}{Q_0^2}$,

kunnen wij schrijven $|Y|^2 = \frac{C}{LQ_0^2} (1 - \frac{1}{Q_0^2} + \dots) \simeq \frac{C}{LQ_0^2}$, wanneer

$$Q_0 \gg 1, \quad = \omega^2 C^2 / Q_0^2.$$

Dus $|Y| \simeq \omega_0 C / Q_0 = \frac{1}{Q_0 \omega_0 L}$.

De corresponderende frequentie ω_a is $\omega_0 (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/Q_0^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q_0^2}\right).$$

Indien $Q_0 > 10$ is, is de frequentie van amplitude-resonantie praktisch niet te onderscheiden van ω_0 .

De frequentie van fase-resonantie wordt gegeven door $\arg Y = 0$,

$$\text{d.w.z. } \frac{\omega CR^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C}{R} = 0, \quad \text{of}$$

$$\omega = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - 1/Q_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0^2}\right).$$

Deze frequentie is niet dezelfde als de frequentie van amplitude-resonantie. Het verschil is ongeveer $\frac{\omega_0}{2Q_0^2}$ wat praktisch te verwaarlozen is als

$Q_0 > 100$ is. De in deze paragraaf afgeleide formules vormen de basis van bepaalde meettechnieken: Q_0 kan worden bepaald door òf de bandbreedte òf

de admittantie bij amplitude-resonantie te meten. De frequentie van fase-resonantie kan bij hoge Q_0 zeer nauwkeurig worden bepaald, mits de fase-meter nauwkeurig is, aangezien het faseverschil tussen I en U zeer snel met de frequentie verandert. Dit volgt uit de betrekking

$$\omega \frac{d(\arg Y)}{d\omega} = \frac{\omega CR^2 - \omega L + 3\omega^3 L^2 C}{R^2 + (\omega CR^2 - \omega L + \omega^3 L^2 C)^2} \quad R \simeq 2\omega L/R = 2Q_0 \quad (\text{bij fase-}$$

resonantie), welke de fractionele verandering van het argument van Y met de frequentie aangeeft.

De admittantie van de schakeling van fig. 85b is

$$Y = \frac{1}{\lambda L} + \frac{1}{R + \frac{1}{\lambda C}}, \text{ welke uit de admittantie van de schakeling van fig. 85a}$$

kan worden afgeleid indien wij vervangen: $j\omega$ door $1/j\omega$, L door $1/C$ en C door $1/L$. Dit houdt in dat $j\omega_0$ wordt vervangen door $1/j\omega_0$ terwijl Q_0 onveranderd blijft. Wij vinden dan dat de frequentie van amplitude-resonantie wordt gegeven door

$$\omega_a = \omega_0 \left(\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/Q_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4Q_0^4} \right).$$

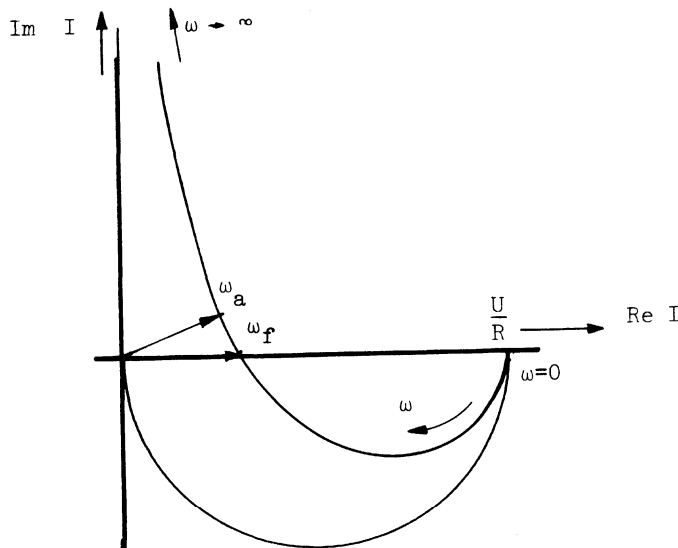


Fig. 86

De minimale waarde van $|Y|^2$ is $\frac{2C}{L} (\sqrt{1 + 2/Q_0^2} - 1/2Q_0^2 - 1)$, dus dezelfde uitdrukking als bij fig. 85a. De frequentie van fase-resonantie is

$$\omega_F = \omega_0 (1 - 1/Q_0^2)^{-\frac{1}{2}} \approx \omega_0 (1 + 1/2Q_0^2).$$

Voor fig. 85c hebben wij $Z = \lambda L + \frac{1}{\lambda C + G}$.

De formules voor de resonantiegrootheden volgen uit die voor fig. 85a indien Y door Z, L door C, C door L en R door G vervangen worden. In dit geval wordt Q_0 gedefinieerd als $\omega_0 C/G$.

Tenslotte, voor fig. 85d geldt $Z = \frac{1}{\lambda C} + \frac{1}{G + 1/\lambda L}$, welk kan worden afge-

leid uit fig. 85b op dezelfde wijze als fig. 85c uit fig. 85a volgt. Deze voorbeelden illustreren het verschil tussen amplitude- en fase-resonantie. Indien Q_0 voldoende groot is, is het verschil niet belangrijk, met uitzondering van bepaalde precisie-meettechnieken. Bij fase-resonantie is de uitdrukking voor de immittantie meestal eenvoudiger dan in het geval van amplitude-resonantie. Dus voor fig. 85a geldt bij fase-resonantie:

$$Y = \lambda C + \frac{1}{\lambda L + R} \text{ is reëel}$$

$$= \frac{R}{\omega^2 L^2 + R^2}, \text{ waarin } \omega^2 L^2 + R^2 = L/C, \text{ zodat } Y = RC/L.$$

Tenslotte willen wij een benaderde relatie tussen de impedanties van de schakelingen van fig. 85a en fig. 74b afleiden welke in de praktijk veel voorkomt. Deze relatie is alleen geldig bij hoge Q.

Voor fig. 85a geldt

$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}.$$

Als $Q \gg 1$ is, dan is $\omega^2 L^2 \gg R^2$, zodat

par.5.1.

$$Y \simeq j\omega C + \frac{R}{\omega^2 L^2} - \frac{j}{\omega L} .$$

Vergelijken wij deze uitdrukking met de admittantie van de schakeling van fig. 74b:

$$Y_1 = j\omega C_1 + G_1 + \frac{1}{j\omega L_1} ,$$

dan volgt $C = C_1$, $L = L_1$, $R = \omega^2 L^2 G_1$.

De equivalentie van de twee schakelingen geldt alleen bij één enkele frequentie. In het bijzonder bij de resonantiefrequentie ω_0 , is $R = \frac{L}{C} G_1$, en voor frequenties die weinig afwijken van ω_0 mag dezelfde relatie worden gebruikt. De fout die dan optreedt is merkbaar in $\arg Y$ maar nauwelijks in $|Y|$.

Opgave: Bewijs deze bewering aan de hand van de formules van deze paragraaf.

Een numeriek voorbeeld wordt geïllustreerd in fig. 87.

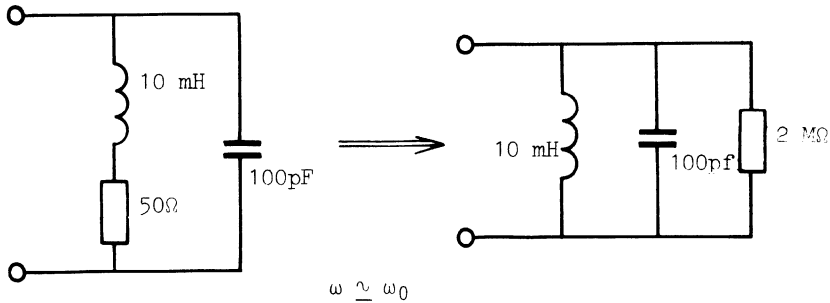


Fig. 87

5.2. Reactantie-schakelingen

In deze paragraaf zullen wij de eigenschappen van netwerken onderzoeken die uitsluitend uit condensatoren en spoelen zijn opgebouwd. Voor deze netwerken is de impedantie (of admittantie), gemeten tussen twee klemmen van het netwerk, zuiver imaginair. Dit is gemakkelijk in te zien aan de hand van beschouwingen over het complexe vermogen. Het door de bron via de klemmen van het netwerk afgegeven actieve vermogen is nul, daar het netwerk geen weerstanden bevat (vgl. §4.6). Wij kunnen dan stellen, gebruik makende van de notatie van §4.6, dat $\text{Re} \{-\frac{1}{2}U_b I_b^*\} = \frac{1}{2} \text{Re } Z|I|^2 = 0$. D.w.z. $Z = jX$. In het algemeen worden netwerken die geen actief vermogen opnemen of afgeven verliesvrije of weerstandsloze netwerken genoemd.* Voortaan zullen wij netwerken die van twee klemmen zijn voorzien - waaraan andere netwerken kunnen worden verbonden - tweepolen noemen. In fig. 88 zijn enkele eenvoudige voorbeelden van reactantie-tweepolen gegeven. Voor beide schakelingen zien wij dat de reactantie een monotoon-stijgende functie van de frequentie is. Dit is een algemeen resultaat voor reactantie-tweepolen en is een vorm van het theorema van Foster. Wij zullen dit theorema nu bewijzen.

Theorema: In een reactantie-tweepool is de afgeleide van de reactantie naar de frequentie niet-negatief. D.w.z. $\frac{dX}{d\omega} \geq 0$.

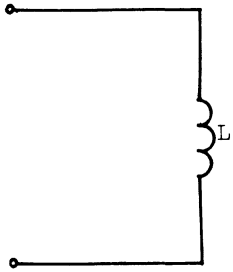
Bewijs: Stel dat een stroombron met sinusvormige sterkte met amplitude I_A aan de klemmen is geschakeld. De frequentie kan naar believen worden gevarieerd zonder dat de amplitude wordt veranderd.

Dan geldt, met de tekenafspraken van § 4.6., $-U_b = jX I_b$, en volgens het theorema van Tellegen,

$$j \frac{dX}{d\omega} = j |I_b|^2 \frac{dX}{d\omega} = -I_b^* \frac{dU_b}{d\omega} = \sum_l I_l^* \frac{dU_l}{d\omega} + \sum_c I_c^* \frac{dU_c}{d\omega},$$

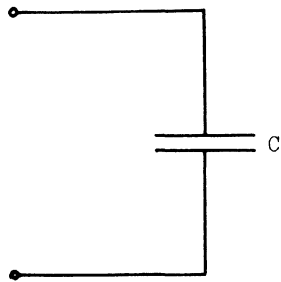
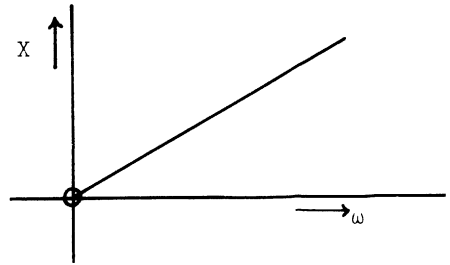
waarin \sum_l en \sum_c sommaties over alle spoelen, respectievelijk condensatoren aanduiden. Essentiëel bij deze vergelijking is de overweging dat als de

*) Zodra men buiten het gebied van constante lineaire netwerken treedt zijn de termen verliesvrij en weerstandsloos niet equivalent.



$$Z = j\omega L = jX$$

$$X = \omega L$$



$$Z = \frac{1}{j\omega C} = jX$$

$$X = -\frac{1}{\omega C}$$

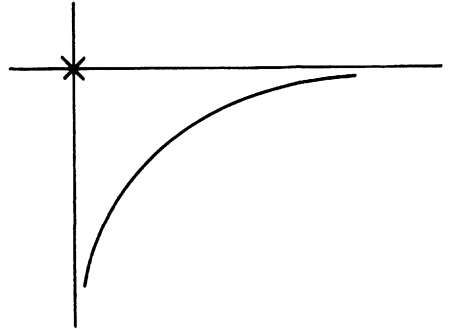


Fig. 88

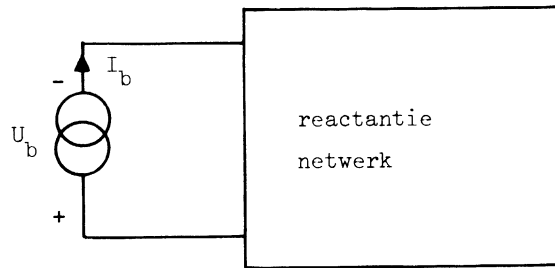


Fig. 89

takspanningen aan de spanningswet van Kirchhoff voldoen, dan voldoen ook de afgeleiden van de takspanningen aan dezelfde wet. Nu is

$$j \frac{dX}{d\omega} = \sum_1 I_1^* \left(jL_1 I_1 + j\omega L_1 \frac{dI_1}{d\omega} \right) + \sum_c I_c^* \left(-\frac{j}{\omega^2 C_c} I_c - \frac{j}{\omega C_c} \frac{dI_c}{d\omega} \right)$$

$$= 4j (W_m + W_e) + \sum_1 j\omega L_1 I_1^* \frac{dI_1}{d\omega} - \sum_c \frac{j}{\omega C_c} I_c^* \frac{dI_c}{d\omega}.$$

Maar $j\omega L_1 I_1^* = -U_1^*$ en $\frac{j}{\omega C_c} I_c^* = U_c^*$, zodat de termen achter de som-

matisymbolen gelijk zijn aan

$$- \sum_1 U_1^* \frac{dI_1}{d\omega} - \sum_c U_c^* \frac{dI_c}{d\omega} = U_b^* \frac{dI_b}{d\omega}, \text{ wegens Tellegen,}$$

$$= 0,$$

wegens de frequentie-onafhankelijkheid van de amplitude van de bronstroom.

Wij hebben dus bewezen dat, bij een stroom-amplitude van 1A,

$$\frac{dX}{d\omega} = 4 (W_m + W_e) = \sum_1 L_1 |I_1|^2 + \sum_c C_c |U_c|^2 \geq 0.$$

Dit is het einde van het bewijs van het theorema, maar wij kunnen verschillende conclusies hieruit trekken.

1. Het gelijkteken kan alleen gelden als $W_m = W_e = 0$. D.w.z. door geen enkele spoel vloeit er een stroom en over geen enkele condensator staat er een spanning. Deze situatie kan zich slechts voordoen bij oneindige frequentie, en slechts dan wanneer er een geleidende weg van condensatoren tussen de klemmen bestaat. Bij oneindige frequentie fungeren de condensatoren als kortsluitingen zodat de totale stroom van de bron door deze condensatoren vloeit zonder dat energie opgeslagen wordt.

2. Uit de beschouwingen over het complexe vermogen volgt dat indien de stroombron amplitude 1A bedraagt,

$$X = 4\omega (W_m - W_e).$$

Hieruit volgt

$$\frac{dX}{d\omega} = \left| \frac{W_m + W_e}{W_m - W_e} \right| \left| \frac{X}{\omega} \right| > \left| \frac{X}{\omega} \right|.$$

D.w.z. de helling van de reactantie-kromme in een punt A is altijd groter dan of gelijk aan de helling van de rechte die de oorsprong met A verbindt. De gelijkheid geldt alleen als òf de magnetische òf de elektrische energie nul is.

Figuur 90 toont twee reactantie-tweepolen en hun bijbehorende krommen. Wij zien dat de reactantie nul kan zijn bij bepaalde hoekfrequenties en oneindig bij andere frequenties. Wij noemen deze hoekfrequenties nulpunten respectievelijk polen van de reactantie of de impedantie. Nu is de reactantie-functie continu behalve in de polen. Dit komt doordat een reactantie-functie van een netwerk opgebouwd uit een eindig aantal elementen een rationale functie moet zijn. De reactantie-functie is namelijk het resultaat van de oplossing van een eindig aantal maas- of knooppuntsvergelijkingen, waarbij slechts een eindig aantal vermenigvuldigingen en optellingen aan de orde is.

Een rationale functie is altijd continu behalve als de noemer nul is. De eigenschap van een monotoon-toenemende reactantie-kromme, te zamen met de continuïteit, houdt in dat de nulpunten en polen alterneren, d.w.z. elkaar afwisselen. Immers als de functie door een nulpunt gaat kan zij alleen toenemen bij toenemende ω , totdat $+\infty$ wordt bereikt. Hierna volgt een sprong naar $-\infty$, waarna de functie weer toeneemt naar nul.

Het is van belang de nulpunten en polen van een reactantie-functie eenvoudig te kunnen bepalen, want wanneer deze waarden bekend zijn ligt de reactantie-kromme vast op één gegeven na. Wij zullen deze laatste bewerking hier niet bewijzen, maar wel in een ander hoofdstuk waar de hele kwestie van polen en nulpunten in een breder verband wordt geplaatst.

De nulpunten zijn die waarden van ω waarvoor geldt $Z(j\omega) = jX(\omega) = 0$. Als $Z = 0$ dan is de spanning nul hoewel een stroom kan bestaan ($U = ZI$). Een nulspanning komt overeen met kortgesloten klemmen. Als wij in de serie-schakeling van fig. 90 de klemmen kortsluiten, dan kan er stroom

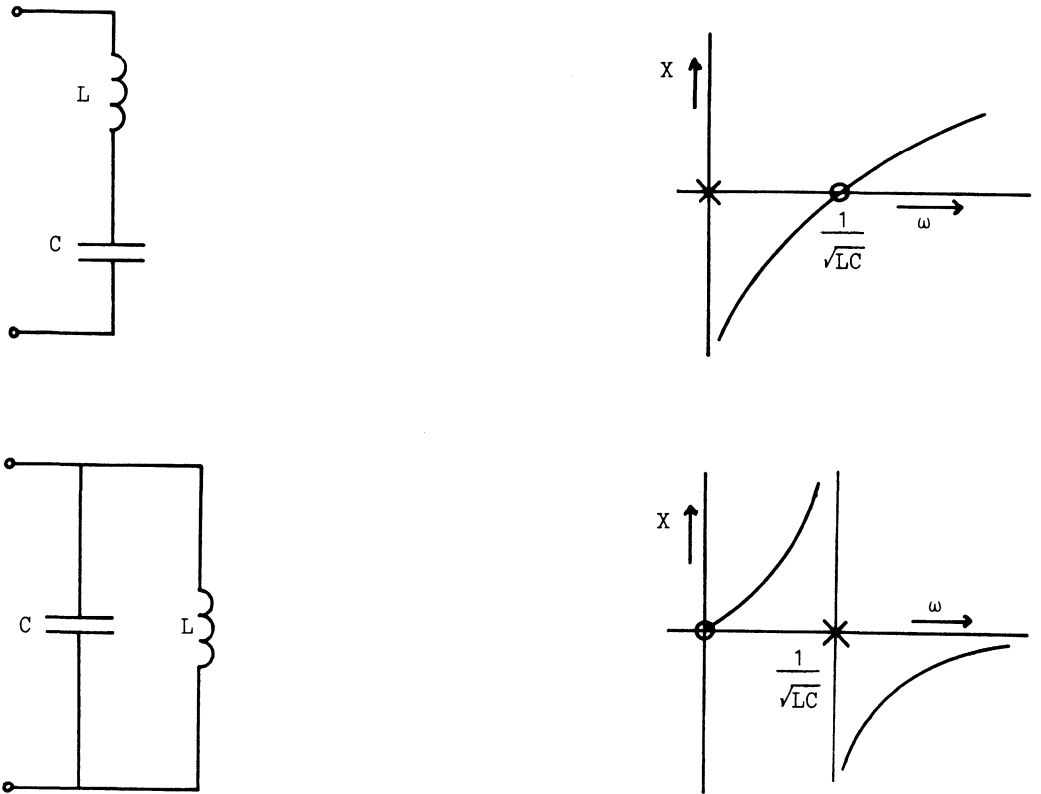


Fig. 90

vloeien in de zo ontstane maas alleen als de maas-impedantie nul is. In dit geval dus alleen als $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Voor de parallelschakeling geldt

bij kortgesloten klemmen dat een stroom kan vloeien alleen als $\omega = 0$; de stroom vloeit door de spoel en er is geen lading op de condensator.

Op dezelfde wijze zijn de polen de frequenties waarbij $Z = \infty$, d.w.z. $Y = 0$. Dit komt overeen met open klemmen (stroom is nul) waartussen een spanning kan bestaan ($I = YU$). Voor de serie-schakeling is dit alleen mogelijk bij $\omega = 0$; de condensator heeft dan een vaste lading zodat er een spanning tussen de klemmen waarneembaar is.

Voor de parallelschakeling geldt dat een spanning tussen de klemmen waarneembaar is als een stroom in de gegeven maas vloeit. Dit is alleen mogelijk als de maas-impedantie nul is, d.w.z. $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

De schakeling van fig. 91 is ingewikkelder, maar de polen en nulpunten kunnen eenvoudig worden gevonden.

Opgave: Toon aan m.b.v. de bovengeschetste methode dat de polen zijn $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ en de nulpunten 0 , $\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 (C_1 + C_2)}}$, ∞ . Controleer dat de polen en nulpunten alterneren; ga uit van $L_1 C_1 > L_2 C_2$.

Andere parameters die bij het construeren van reactantie-krommen van belang kunnen zijn, zijn de hellingen bij de frequenties nul en oneindig. Bij frequentie nul fungeren de condensatoren als open takken en de spoelen als kortsluitingen. Als er een geleidende weg van spoelen tussen de klemmen bestaat, dan vloeit de totale stroom door deze zelf-inductie.

De helling $\frac{dX}{d\omega}$ ($\omega = 0$) is gelijk aan $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{X}{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{U}{j\omega I}$. Bij frequenties

$\omega \ll 1$, maar $\omega \neq 0$, is de stroom die door iedere condensator vloeit te verwaarlozen vergeleken met de stroom door de spoelen in de geleidende weg van spoelen. Bij een vaste bronspanning kunnen wij dan de condensatoren uit de schakeling verwijderen zonder dat de stroomverdeling in de schakeling merkbaar verandert. De equivalente zelf-inductie van het resulterende spoelnetwerk is dan gelijk aan de gezochte helling, bv. in fig. 91, $L_1 + L_2$.

Is er echter geen geleidende weg van spoelen tussen de klemmen, dan komt de hele spanning over bepaalde condensatoren te staan. Wij kunnen dan de spoelen kortsluiten zonder de spanningsverdeling bij lage frequenties merkbaar te storen. De helling van de reactantie-kromme is natuurlijk dan oneindig, maar wij kunnen zeggen dat de schakeling zich dan gedraagt als de equivalente capaciteit van het condensator-netwerk dat resulteert na kortsluiting van de spoelen; b.v. is deze equivalente capaciteit C in de serie-schakeling van fig.90.

Natuurlijk kan men de helling bepalen door eerst de impedantie te berekenen en dan te differentiëren. Dit is echter zeer tijdrovend. Als de impedantie bekend is dan is de berekening $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{X}{\omega}$ bijzonder eenvoudig.

De limiet is namelijk het quotient van de coëfficiënten van de laagste macht van ω in de teller en noemer van X , als $X(0) = 0$, en oneindig als $X(0) \neq 0$.

Om de helling bij oneindige frequentie te bepalen kunnen wij gebruik maken van de voorgaande redenering als wij overal spoel en condensator verwisselen. Alleen moeten wij bedenken dat als een equivalente spoel resulteert de helling gelijk is aan de zelf-inductie van deze spoel; als een equivalente condensator resulteert dan is de helling nul.

Overeenkomstige resultaten voor de susceptantie kunnen worden afgeleid. Daar $X = \frac{-1}{B}$, is $\frac{dB}{d\omega} = \frac{1}{X^2} \frac{dX}{d\omega} \geq 0$.

Dit resultaat kan ook uit de eerste beginselen worden afgeleid als wij in fig. 89 de stroombron vervangen door een spanningsbron. Verder blijven alle voorgaande beschouwingen geldig voor B als wij overal de woorden condensator en spoel verwisselen alsmede serie en parallel.

Deze overeenkomst wordt geïllustreerd in fig. 92 waarvoor geldt:

$$Z = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2}} \quad (\text{fig. 92a})$$

$$Y = j\omega C_1' + \frac{1}{j\omega L_1'} + \frac{1}{j\omega L_2' + \frac{1}{j\omega C_2'}} \quad (\text{fig. 92b})$$

Opgave: Construeer een reactantie-tweepool met nulpunten identiek aan de polen van de schakeling van fig. 90 en met polen identiek aan de nulpunten van dezelfde schakeling, en verifieer het gevonden resultaat door een directe berekening.

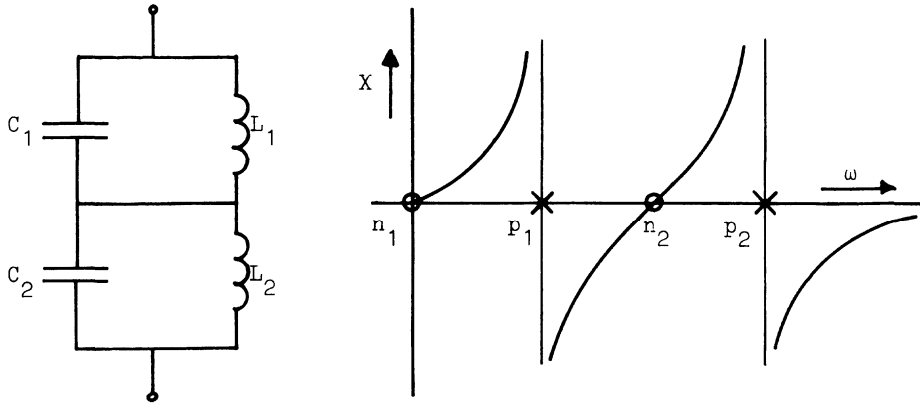


Fig. 91

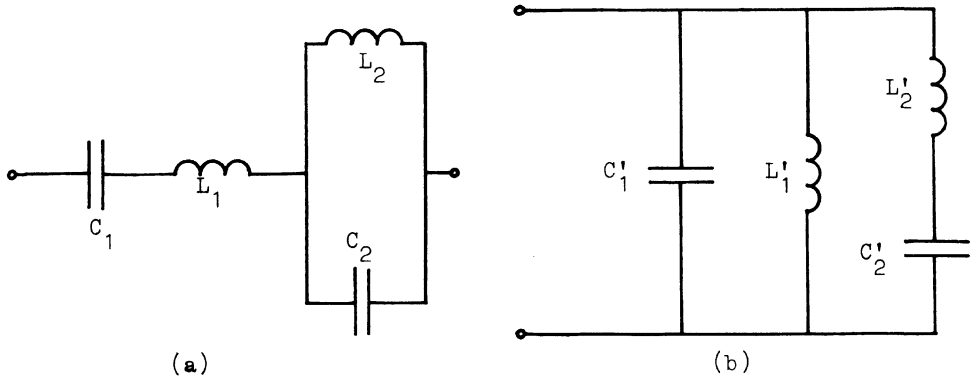


Fig. 92

5.3. Een netwerk van Zobel.

Een interessant netwerk is dat van Zobel (fig. 93a). De admittantie hiervan is

$$Y = \frac{1}{\lambda L + R} + \frac{1}{R + 1/\lambda C} .$$

Indien $R/L = 1/CR$, dan is $\frac{1/L}{\lambda + R/L} + \frac{\lambda/R}{\lambda + R/L} = 1/R$.

d.w.z. de admittantie is onafhankelijk van de frequentie ondanks de aanwezigheid van reactieve elementen. Om deze reden heet het netwerk een constant-weerstandsnetwerk. Voor het netwerk van fig. 93b geldt dezelfde eigenschap, welke volgt op dezelfde manier wanneer de impedantie berekend wordt, nl. $1/G = Z$, als $G/C = 1/GL$. Het is mogelijk dit resultaat te generaliseren. Wanneer in fig. 93a de L en de C door impedanties Z_1 , Z_2 worden vervangen, zodanig dat $Z_1 Z_2 = R^2$ voor alle waarden van λ , dan verkrijgen wij

$$Y = \frac{1}{Z_1 + R} + \frac{1}{Z_2 + R} = \frac{Z_1 + Z_2 + 2R}{Z_1 Z_2 + R(Z_1 + Z_2) + R^2} = \frac{1}{R}, \text{ mits } Z_1 + Z_2 + 2R \neq 0.$$

Uit de beschouwingen over het complexe vermogen volgt dat $\text{Re} Z_1 \geq 0$ en $\text{Re} Z_2 \geq 0$, zodat $Z_1 + Z_2 + 2R$ nooit nul kan zijn.

De impedanties Z_1 , Z_2 worden invers genoemd. Dus de impedantie Z_1 heeft een admittantie die evenredig is aan Z_2 . Potentiële voorbeelden zijn, behalve de eenvoudige zelfinductie en capaciteit, de netwerken van fig. 92a en b, fig. 74a en b. Als toepassingsvoorbeeld, beschouwen wij het netwerk van fig. 94, dat een frequentie-afhankelijke spanningsdeler voorstelt - hoewel de ingangsimpedantie R is - indien

$$\lambda L_1 + 1/\lambda C_1 + R_1 = R^2(\lambda C_2 + 1/\lambda L_2 + G_2),$$

$$\text{zodat } L_1 = R^2 C_2, \quad C_1 = L_2/R^2, \quad R_1 = R^2 G_2.$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\lambda C_2 + 1/\lambda L_2 + G_2}{\lambda C_2 + 1/\lambda L_2 + G_2 + 1/R}.$$

Netwerken met de hier genoemde eigenschappen vinden hun toepassingen in de communicatietechniek in verband met filters en effenaars welke gebruikt worden om bepaalde gewenste frequentiekaracteristieken te realiseren.

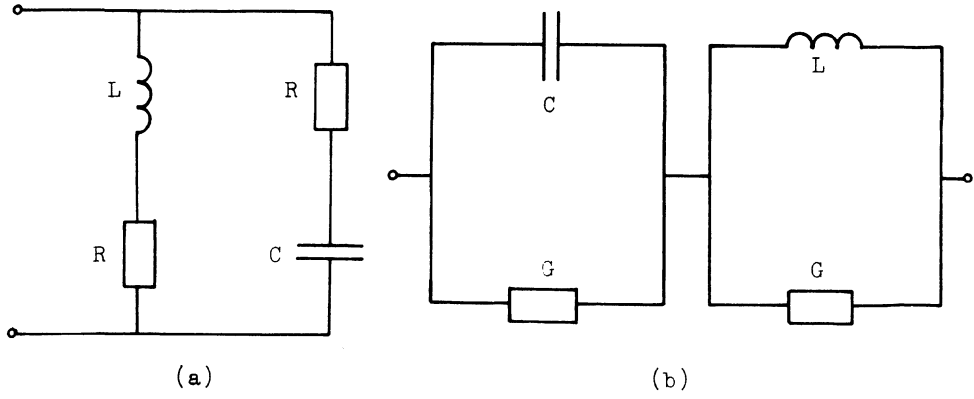


Fig. 93

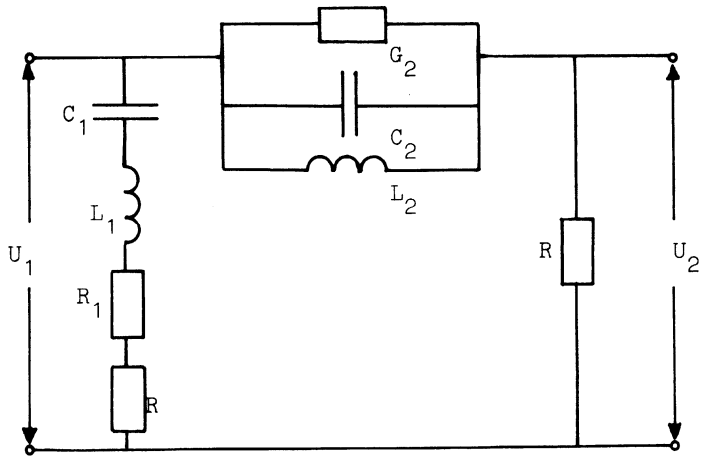


Fig. 94

6. SYMMETRISCHE DRIEFASENSYSTEMEN

6.1. Inleiding.

In de energietechniek wordt veel gebruik gemaakt van netwerken waarin drie spanningsbronnen voorkomen en waarvan de sterkten voldoen aan de eisen:

- a) de amplituden van de drie bronsterkten zijn gelijk.
- b) Het onderlinge faseverschil tussen de spanningen is $\frac{2\pi}{3}$ rad = 120° .
- c) De drie bronnen hebben dezelfde frequentie.

In zo'n geval spreekt men van een symmetrisch drie-fasensysteem. Figuur 95 geeft de twee meest gebruikte wijzen van schakelen van de bronnen aan. Zoals later zal blijken, bestaat uit praktische overwegingen een zekere voorkeur voor de schakeling van fig. 95a.

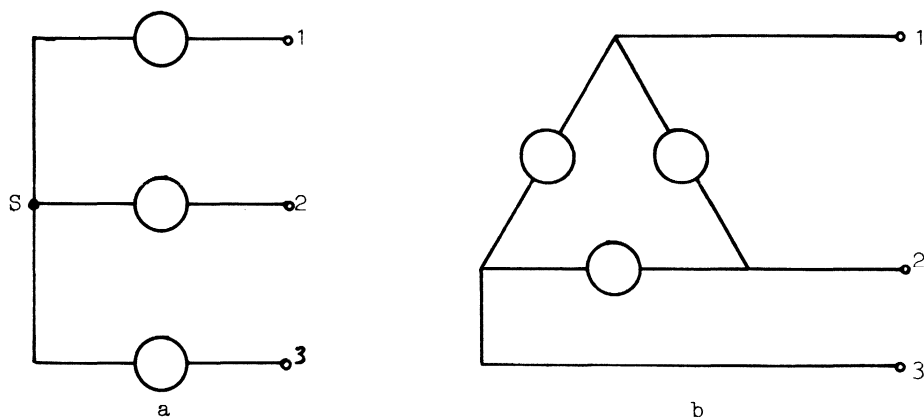


fig. 95

In fig. 95a heten de spanningen $u_{1S}(t)$, $u_{2S}(t)$, $u_{3S}(t)$ de fasespanningen. De spanningen $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$, $u_{31}(t)$ heten de lijnspanningen. In fig. 95a zijn de lijnspanningen en fasespanningen verschillend; in fig. 95b zijn zij echter identiek. Overeenkomstige definities gelden voor de fasestromen en de lijnstromen. De fasestromen zijn de stromen die door de bronnen vloeien, terwijl de lijnstromen de stromen zijn die in de drie draden vloeien die

de schakeling van bronnen via de drie klemmen aan andere netwerken verbinden.

Vraag: In welke schakeling zijn de lijn- en fasestromen a) identiek, b) verschillend?

Uit de definitie volgt dat de drie bronsterkten kunnen worden geschreven in één van de twee volgende vormen:

$$u_{1S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi), \quad u_{2S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi - \frac{2\pi}{3}), \quad u_{3S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi - \frac{4\pi}{3})$$

of

$$u_{1S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi), \quad u_{2S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi + \frac{2\pi}{3}), \quad u_{3S}(t) = |U| \cos(\omega t + \phi + \frac{4\pi}{3}).$$

In het eerste geval zeggen wij dat de fasevolgorde 1 2 3 is, d.w.z. u_{1S} is een fase voor t.o.v. u_{2S} enz. In het tweede geval is de fasevolgorde 3 2 1. Deze relaties kunnen het gemakkelijkst worden weergegeven in een wijzerdiagram, waarbij gebruik gemaakt wordt van de complexe grootheden

$$U_{1S} = |U| e^{j\phi} = U, \quad U_{2S} = U \exp(j \frac{2\pi}{3}), \quad U_{3S} = U \exp(j \frac{4\pi}{3})$$

in het geval van de volgorde 3 2 1 (fig. 96).

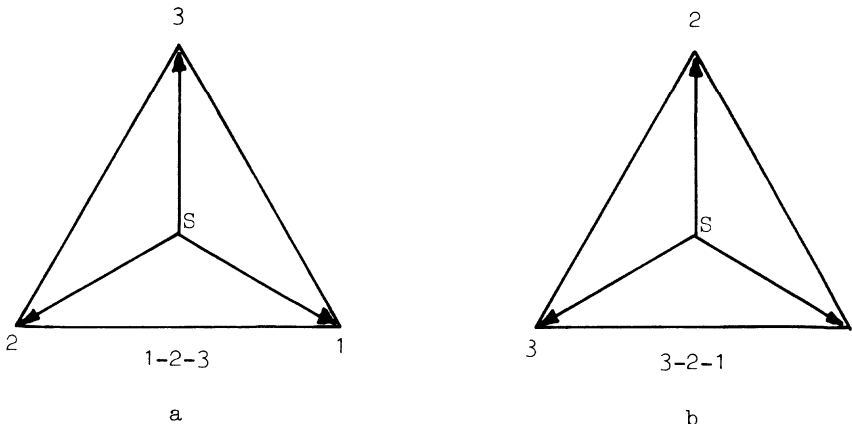


fig. 96

- Opgaven: 1. Bepaal uit het wijzerdiagram de grootte van de amplituden van de lijnspanningen van de schakeling van fig. 95a.
2. Bepaal uit het wijzerdiagram de som van de drie fasespanningen.

6.2. Wat is de zin van driefasensystemen?

De fasespanningen van een driefasensysteem kunnen in principe in een elektrische machine worden opgewekt, waarin drie gelijke vlakke wikkelingen met constante hoeksnelheid draaien in een homogeen magnetisch veld, om een as die in de drie vlakken van de wikkelingen ligt en die loodrecht op de magnetische veldlijnen staat (fig. 97). Wanneer bovendien de vlakken gelijke hoeken met elkaar maken, dan is het systeem symmetrisch. Hetzelfde kan worden bereikt wanneer de drie symmetrisch opgestelde wikkelingen stil staan en het magnetisch veld met constante hoeksnelheid draait (fig. 98). Deze opstelling biedt praktische voordelen boven die van fig. 97, hoewel het magnetisch veld moeilijk homogeen te maken is.

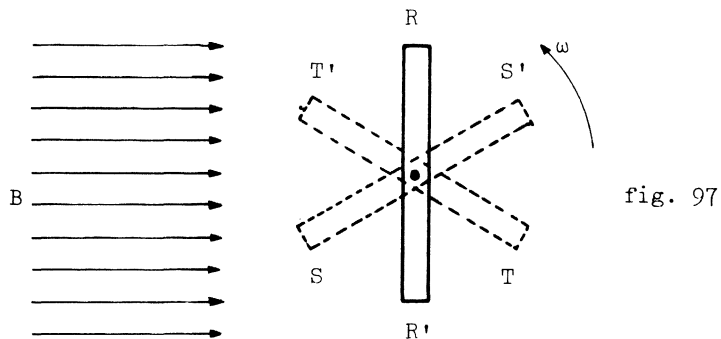


fig. 97

In beide gevallen kunnen wij stellen dat de totale flux die iedere wikkeling omvat evenredig is aan $\cos \theta$ waarin θ de hoek is tussen de richting van het magnetisch veld en de normaal van het vlak (fig. 97) of de as van de wikkeling (fig. 98). Bij constante hoeksnelheid variëert de flux sinusvormig met de tijd. Hierbij moet wel worden opgemerkt dat fig. 98 een zeer schematisch voorstelling van de werkelijkheid weergeeft. Om juist een sinusvormige flux in de wikkelingen op te wekken is de vorm van de poolschoenen van de magneet en de ruimtelijke ligging van de wikkelingen van primair belang. De voordelen van een driefasensysteem boven een enkel fasensysteem zijn aanzienlijk. Enkele hiervan zijn:

1. Besparing van ijzer in de magnetische structuren van elektrische machines.
2. Besparing van koper bij de transmissie van energie van de elektrische centrale naar de gebruiker.
3. De mogelijkheid m.b.v. stilstaande wikkelingen een draaiend magnetisch veld op te wekken. Om deze reden bestaat de nu verouderde benaming "draaistroom"systemen voor driefasensystemen.
4. De mogelijkheid om in roterende elektrische machines een constant mechanisch koppel te verwezenlijken.
5. Een driefasenmotor kan met eenvoudiger middelen worden gestart dan een enkelfasenmotor.
6. Bij een symmetrische belasting levert een driefasengenerator een constant momenteel vermogen ondanks het feit dat de opgewekte spanningen sinusvormig zijn.

Wij kunnen in dit college niet ingaan op de verschillende technische aspecten van elektrische machines en zullen ons beperken tot de theorie van driefasennetwerken.

6.3. Vermogen

Stel dat de bronnen van een symmetrisch driefasensysteem zijn gekoppeld aan drie gelijke admittanties (fig. 99a). De corresponderende stromen zijn dan

$$I_1 = YU_1, I_2 = YU_2, I_3 = YU_3,$$

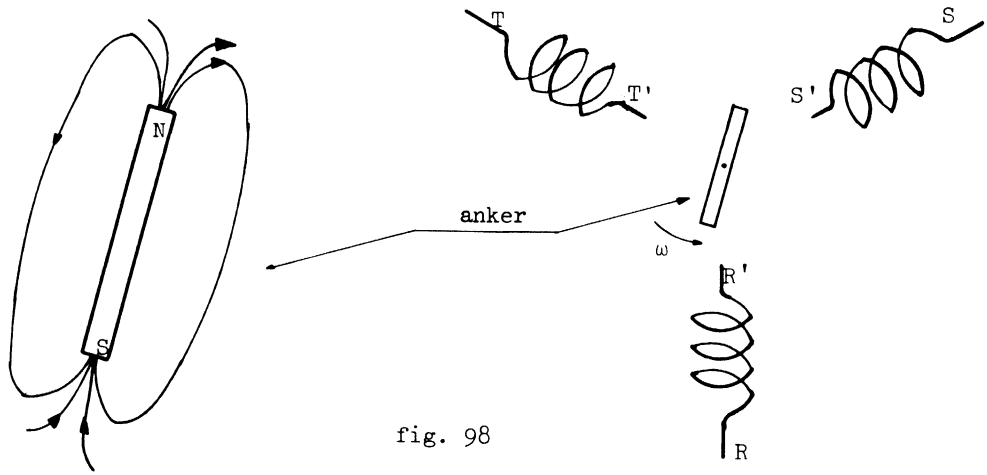


fig. 98

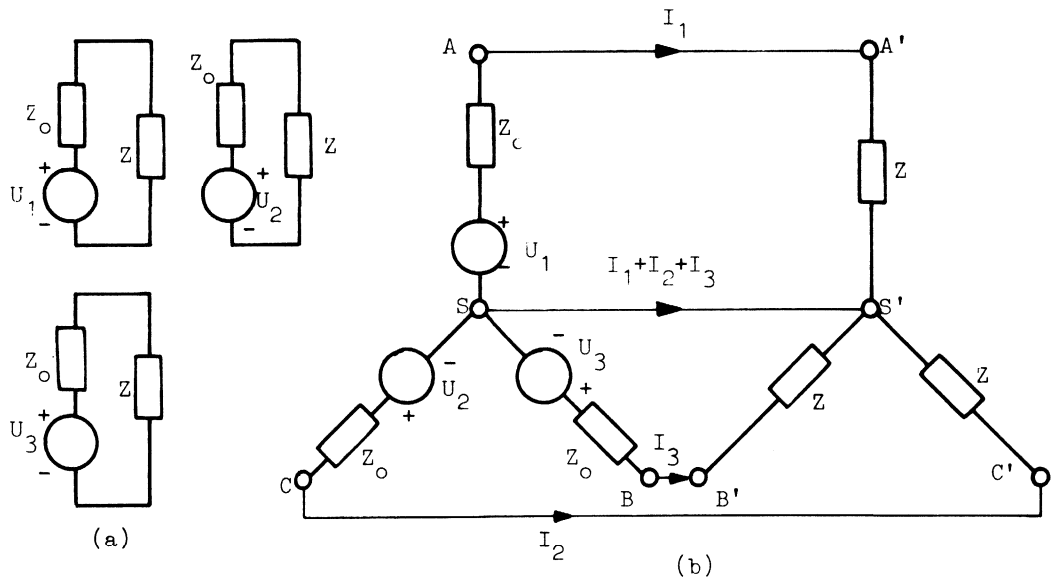


fig. 99

waarin Y de totale admittantie van iedere schakeling is.

Wij kunnen dan schrijven

$$u_1(t) = \frac{1}{2} \{U_1 e^{j\omega t} + U_1^* e^{-j\omega t}\}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{2} \{I_1 e^{j\omega t} + I_1^* e^{-j\omega t}\}$$

$$= \frac{1}{2} \{Y U_1 e^{j\omega t} + Y^* U_1^* e^{-j\omega t}\}$$

en het totale momentele vermogen dat door de bronnen wordt afgegeven is

$$\text{dan } p(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3$$

$$= \frac{1}{4} \{ \{U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3\} e^{2j\omega t}$$

$$+ \{U_1 I_1^* + U_1^* I_1 + U_2 I_2^* + U_2^* I_2 + U_3 I_3^* + U_3^* I_3\}$$

$$+ \{U_1^* I_1^* + U_2^* I_2^* + U_3^* I_3^*\} e^{-2j\omega t} \} .$$

$$\text{Maar } U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3 = Y(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2).$$

Schrijven wij $U_1 = a U_2$, $U_2 = a U_3$, waarin $a = e^{j2\pi/3}$,

$$\text{dan is } U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = U_3^2 (1 + a^2 + a^4) = \frac{1 - a^6}{1 - a^2} U_3^2 = 0,$$

aangezien $a^6 = \exp(j4\pi) = 1$.

Dus is de coëfficiënt van $e^{2j\omega t}$ in $p(t)$ nul. De coëfficiënt van $e^{-2j\omega t}$ is ook nul, daar deze coëfficiënt het toegevoegd complexe getal van de coëfficiënt van $e^{j2\omega t}$ is.

$$\text{Derhalve is } p(t) = \frac{1}{2} \text{Re} (U_1 I_1^* + U_2 I_2^* + U_3 I_3^*)$$

$$= \frac{3}{2} \text{Re} \{Y |U|^2\} = \frac{3}{2} |U|^2 \text{Re} \{Y\} = \text{const.}$$

Het totaal geleverde momenteel vermogen is dus constant ondanks het feit dat de spanningen sinusvormig zijn. Dit betekent dat in een elektrische machine waarvan de wikkelingen op deze symmetrische wijze belast, res-

pectievelijk gevoed zijn, het mechanisch koppel aan de as van de machine in eerste benadering constant moet zijn. Immers in een ideale machine waar de omzetting van elektrische energie in warmte te verwaarlozen is en waarbij de opgeslagen elektromagnetische energie in de machine òf te verwaarlozen òf constant is, moet $p(t) = T\Omega$ waarin T het mechanische koppel is en Ω de constant veronderstelde hoeksnelheid is.

Deze gelijkheid is een gevolg van het principe van behoud van vermogen, nl. wanneer geen energie wordt opgeslagen of omgezet in warmte, is het totaal toegevoerde vermogen - mechanisch en elektrisch - nul, wanneer voor de mechanische grootheden een overeenkomstige tekenafspraken als bij de elektrische grootheden wordt gemaakt. Dat het mechanische koppel niet helemaal constant is, is een gevolg van allerlei secundaire effecten die wij hier niet genoemd hebben.

Een verdere eigenschap van de schakeling van fig. 99a is dat de som van de stromen nul is:

$$I_1 + I_2 + I_3 = Y(U_1 + U_2 + U_3) = YU_3(1 + a + a^2) = Y\left(\frac{1 - a^3}{1 - a}\right)U_3 = 0.$$

Dit betekent dat als wij de bronnen aan de belasting volgens fig. 99b verbinden, de stroom in de geleider SS' nul is. D.w.z. onder de gegeven omstandigheden kunnen wij de z.g. nulleider SS' weglaten zonder dat de stromen in de belastingsimpedanties veranderen. Het is evident dat bij de schakeling van fig. 99b zonder nulleider slechts drie verbindingsgeleiders tussen de bronnen en belasting nodig zijn terwijl in fig. 99a, waar hetzelfde vermogen wordt overgedragen, zes verbindingsgeleiders nodig zijn.

Het voordeel van een symmetrisch driefasensysteem bij het transport van elektrische energie over lange afstanden boven een enkel-fasensysteem komt hier duidelijk tot uiting. Bij een enkel-fasensysteem, met fase-spanning U zijn twee geleiders nodig en is het overgedragen actief vermogen $\frac{1}{2} \operatorname{Re} Y |U|^2$. Met dezelfde fase-spanning en een driefasensysteem wordt driemaal zoveel vermogen overgedragen ten koste van slechts één extra geleider.

6.4. Berekening van driefasennetwerken

Voor de berekening van netwerken met drie bronnen met onderling faseverschillen hebben wij alle tot dusverre behandelde rekenmethoden beschikbaar, zoals de maasmethode, knooppuntmethode, het superpositiebeginsel, de theorema's van Thévenin en Norton alsmede de ster-driehoektransformatie. Daarnaast zijn vooral wijzerdiagrammen bijzonder nuttig voor het doorgronden van de werking van zo'n schakeling. De enig nieuwe factor in de berekeningen is het feit dat de som van de spanningsbronsterkten nul is.

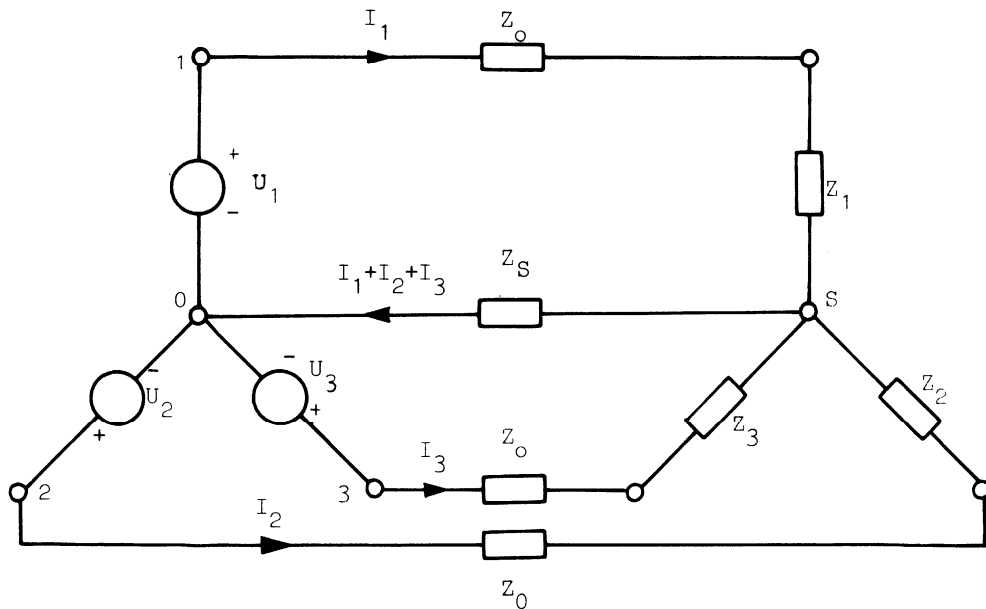
Voorbeeld 1

fig. 100

De seriecombinatie van spanningsbron en de impedantie Z_0 is het Thévenin-
 vervangingschema van een generatorwikkeling. De schakeling van figuur
 100 is een vrij algemene schakeling waaruit allerlei in de praktijk

voorkomende schakelingen kunnen worden afgeleid door bepaalde impedanties gelijk nul (kortsluiting) of oneindig (open tak) te stellen. In deze schakeling zijn er drie mazen en zeven knooppunten. Als wij echter het punt 0 als referentie kiezen dan zijn de potentialen van de knooppunten 1, 2, 3 bekend. Verder kunnen de serieketens van Z_0 en Z_1 , Z_0 en Z_2 , Z_0 en Z_3 tot equivalente enkele takken worden teruggebracht, zodat er dan slechts de potentiaal van S als onbekende knooppuntspotentiaal overblijft. Wij kiezen derhalve de knooppuntmethode. Definiëren wij de admittanties

$$Y_1 = (Z_0 + Z_1)^{-1}, \quad Y_2 = (Z_0 + Z_2)^{-1}, \quad Y_3 = (Z_0 + Z_3)^{-1}, \quad Y_S = Z_S^{-1},$$

dan volgt voor het knooppunt S:

$$(Y_S + Y_1 + Y_2 + Y_3) U_{S0} - Y_1 U_1 - Y_2 U_2 - Y_3 U_3 = 0.$$

D.w.z.

$$U_{S0} = \frac{Y_1 U_1 + Y_2 U_2 + Y_3 U_3}{Y_S + Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Hieruit kunnen alle gewenste takspanningen of stromen worden gevonden. Bijvoorbeeld,

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 (U_1 - U_{S0}) \\ &= \frac{(Y_S + Y_2 + Y_3) U_1 - Y_2 U_2 - Y_3 U_3}{Y_S + Y_1 + Y_2 + Y_3} Y_1. \end{aligned}$$

De stromen I_2 en I_3 volgen dan door verwisseling van de indices 1 en 2 respectievelijk 1 en 3. De nulleiderstroom is $Y_S U_{S0}$. Indien $Y_S = 0$, hebben wij het geval van een ster-bronschakeling en een sterbelasting die dan aan elkaar verbonden zijn zonder nulleider. Aan de andere kant, als $Y_S \rightarrow \infty$, krijgen wij het geval van een nulleider-verbinding zonder lijnimpedantie. Andere in de praktijk belangrijke gevallen zijn die van de driehoekbelasting (fig. 101) en die van de onsymmetrische sterbelasting, welke volgt als een van de impedanties $Z_1, Z_2, Z_3 \rightarrow \infty$. Deze laatste schakeling kan echter evengoed worden berekend m.b.v. de maasmethode,

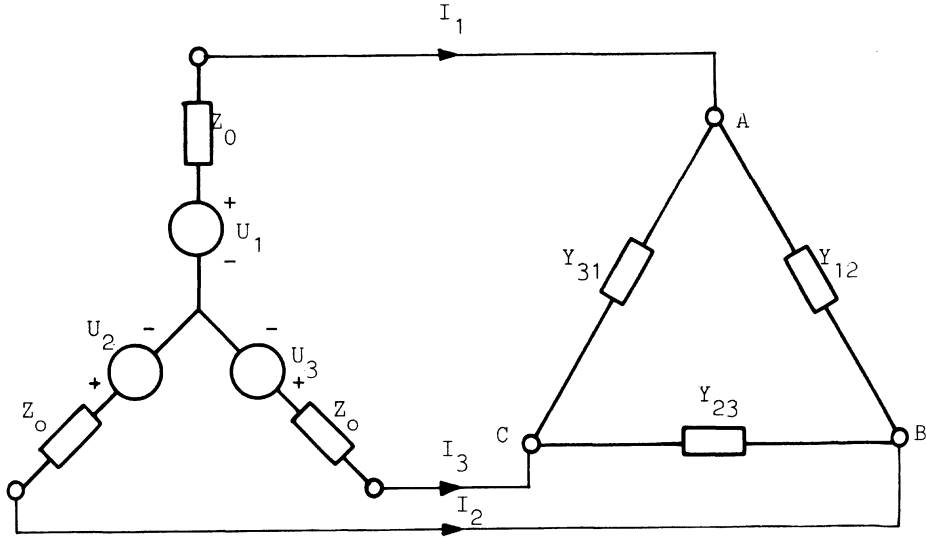


fig. 101

daar er slechts één maas aanwezig is. De schakeling van fig. 101 kan worden berekend door eerst de driehoek in een ster om te zetten en dan de resultaten van fig. 100 toe te passen. Wil men echter de stromen in de admittanties Y_A , Y_B , Y_C weten, dan is het nodig de potentialen van de knooppunten A, B, C te berekenen, welke echter gemakkelijk volgen uit de berekening van de stromen I_1 , I_2 , I_3 . Anders, is natuurlijk ook een directe berekening mogelijk m.b.v. de maasmethode (3 mazen) of de knooppuntmethode (3 onbekende knooppuntspotentialen).

Voorbeeld 2

In deze schakeling komt een driehoek voor van de spanningsbronnen en hun bijbehorende impedantie. Daar men in de praktijk tracht het reële deel van Z_0 zo klein mogelijk te houden om de warmteontwikkeling in de wikkelingen van de machine te minimaliseren, is de maasimpedantie bij zo'n driehoekschakeling klein. Weliswaar is de totale maasspanning nul, maar

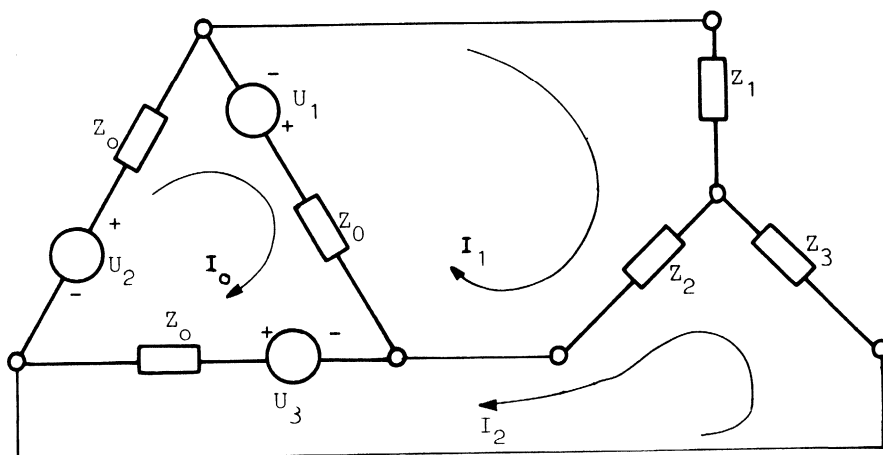


fig. 102

als er ergens een storing in de amplitude of de fase van een van de bronnen optreedt, kan een grote maasstroom vloeien.

Ook bij een sterk onsymmetrische belasting kunnen de bronstromen zeer groot zijn zodat er een ontoelaatbare warmteontwikkeling in de wikkelingen van de machine plaatsvindt. Om deze reden wordt deze schakeling bij geringe Z_0 niet veel toegepast.

De drie maasvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + U_3 &= 0 = 3Z_0 I_0 - Z_0 I_1 + Z_0 I_2 \\ -U_1 &= -Z_0 I_0 + (Z_1 + Z_2 + Z_0) I_1 + Z_2 I_2 \\ -U_3 &= -Z_0 I_0 - Z_2 I_1 - (Z_0 + Z_2 + Z_3) I_2, \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{1}{\Delta} \left((Z_0 + 2Z_2 + Z_3) U_1 + (Z_1 + 2Z_2 + Z_0) U_3 \right) \\ I_1 &= -\frac{1}{\Delta} \left((2Z_0 + 3Z_2 + 3Z_3) U_1 + (3Z_2 + Z_0) U_3 \right) \\ -I_2 &= -\frac{1}{\Delta} \left((3Z_2 + Z_0) U_1 + (3Z_1 + 3Z_2 + 2Z_0) U_3 \right), \end{aligned}$$

waarin $\Delta = (2Z_0(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_0^2 + 3(Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1))$.

In het symmetrische geval, $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$, is

$$I_0 = \frac{-(3Z+Z_0)(U_1+U_3)}{(3Z+Z_0)^2} = \frac{U_2}{3Z+Z_0}$$

$$I_1 = \frac{U_2 - U_1}{3Z+Z_0}, \quad I_2 = \frac{U_3 - U_2}{3Z+Z_0}.$$

De stromen in de drie takken van de driehoek zijn dan

$$I_0 = \frac{U_2}{3Z+Z_0}, \quad I_0 - I_1 = \frac{U_1}{3Z+Z_0}, \quad I_0 + I_2 = \frac{U_3}{3Z+Z_0}.$$

Wanneer $\text{Im}Z_0 = -3 \text{Im}Z$, dan is de noemer zeer klein, daar $\text{Re}Z_0$ zo klein mogelijk wordt gekozen. Het gevolg is dat dan grote stromen in alle takken vloeien, hetgeen tot een gevaarlijke situatie kan leiden. Er is dan sprake van resonantie tussen Z_0 en de serie-combinatie van de drie impedanties. Een andere mogelijkheid om grote stromen in de takken te krijgen is het geval dat Z_0 klein is en $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = 0$. Dan is $\Delta \simeq 2Z_0 (Z_1+Z_2+Z_3)$, d.w.z. klein, terwijl de tellers van I_1, I_2 eindig zijn. Het gevolg is grote takstromen.

6.5. Uitgewerkte voorbeelden met wijzerdiagrammen

Voorbeeld

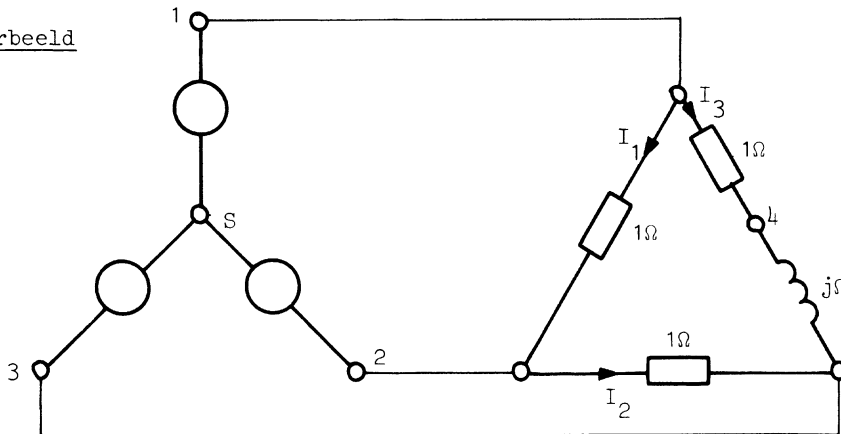


fig. 103

Gevraagd wordt van dit probleem het wijzerdiagram van spanning en stroom te tekenen. Wij zullen dit doen voor de twee mogelijke fasevolgorden.

Fasevolgorde 123

De bronnen vormen een symmetrisch driefasen-stelsel waarvan het spanningsdiagram gegeven is in fig. 104.

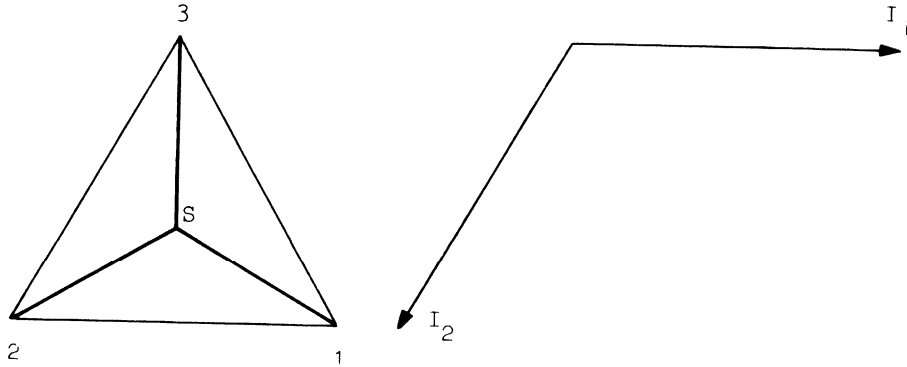


fig. 104

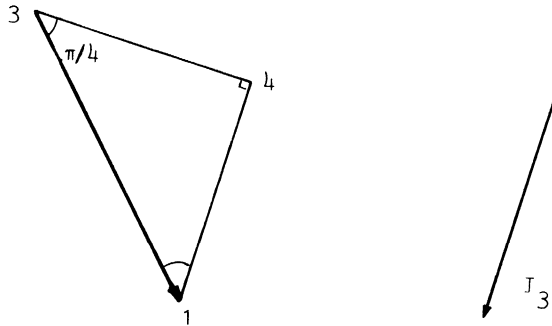
Uit het schema volgt: $I_1 = 1 U_{12}$ en $I_2 = 1 U_{23}$.

Voor de bepaling van I_3 gaan we uit van

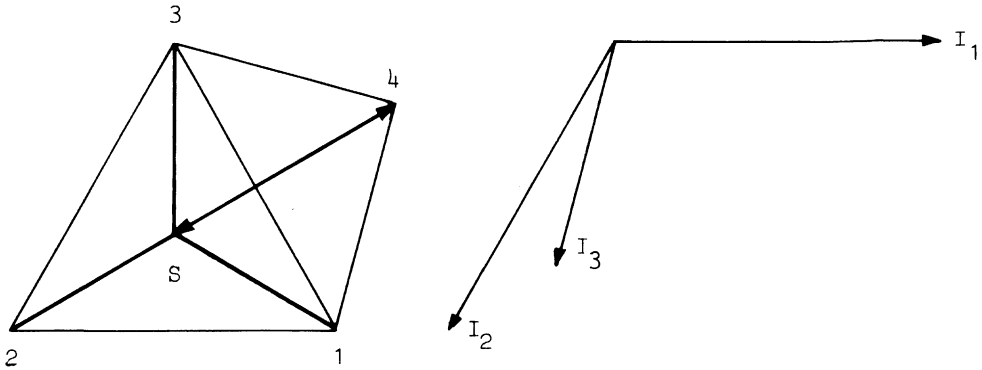
$$U_{13} = (1+j)I_3, \text{ dus, } I_3 = \frac{1}{2} U_{13}(1-j)$$

$$|I_3| = \frac{1}{2} \sqrt{2} |U_{13}| \text{ en } \arg I_3 = \arg U_{13} - \frac{\pi}{4}.$$

Dit leidt, met $U_{14} = 1 I_3$, tot de volgende figuren:



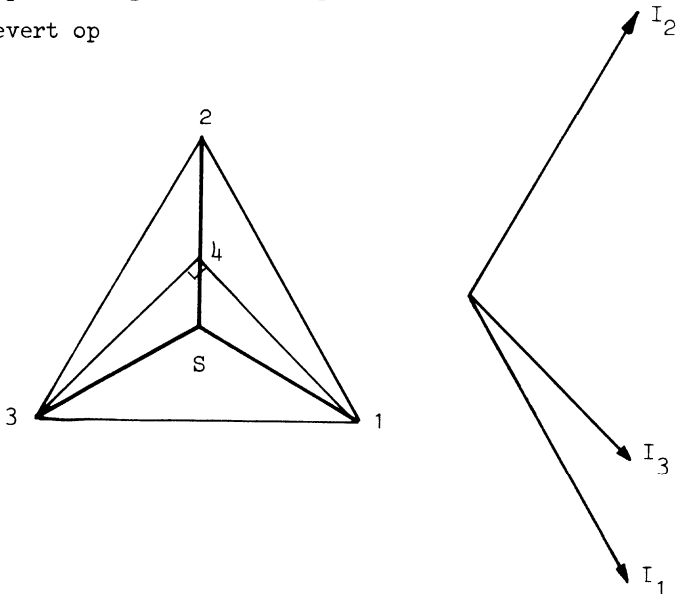
Het complete wijzerdiagram van de spanningen en het wijzerdiagram van de belasting-takstromen volgen hieruit.



De lijnstromen kunnen worden gevonden door vectorische optelling van de belastingstromen. Voor de duidelijkheid van het diagram is dit hier niet gebeurd.

Fasevolgorde 321

Wij bepalen volgens dezelfde procedure als hiervoor de wijzerdiagrammen. Dit levert op



Ga na dat deze diagrammen juist zijn.

Opmerking: Wij stellen vast dat de spanning U_{4S} in beide gevallen onder meer een geheel andere modulus heeft. Bij fasevolgorde 123 is

$$|U_{4S}| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) |U_{13}| \simeq 0,79 |U_{13}|$$

terwijl bij fasevolgorde 321

$$|U_{4S}| = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) |U_{13}| \simeq 0,21 |U_{13}|.$$

In het eerste geval is $|U_{4S}|$ bijna vier maal zo groot als in het tweede geval.

Conclusie: Wij kunnen met een asymmetrische belasting, de fasevolgorde van een driefasensysteem vaststellen.

Voorbeeld 2: de bepaling van de ligging van het sterpunt van een asymmetrische sterbelasting.

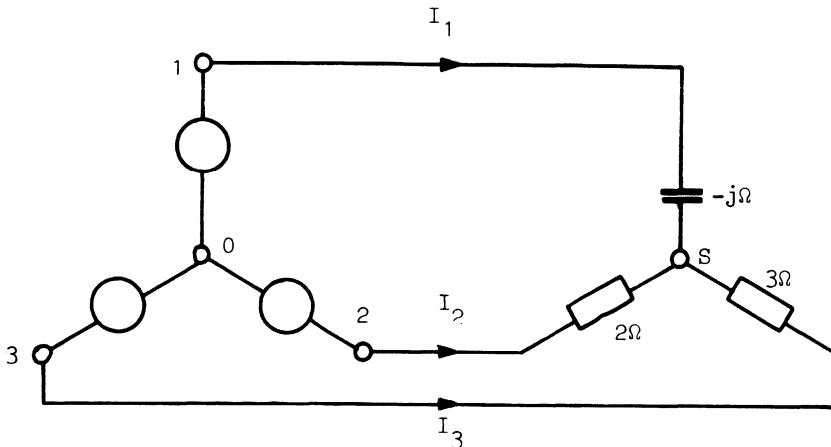


fig. 105

Er geldt: $U_{12} = -jI_1 - 2I_2,$

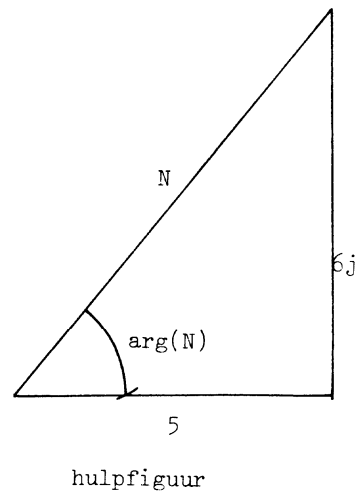
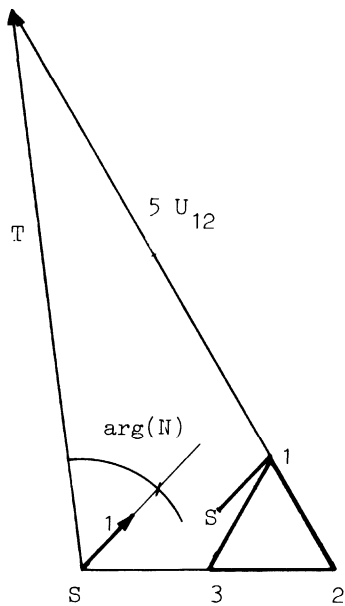
$$U_{23} = 2I_2 - 3I_3,$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

$$U_{1S} = -jI_1$$

$$\text{Hieruit volgt } U_{1S} = \frac{2U_{23} + 5U_{12}}{5 + 6j} = \frac{T}{N}$$

In het wijzerdiagram van spanningen kan men de teller T construeren. Na het tekenen van de noemer N in een hulpfiguur komt men via moduli en argumenten tot de spanning U_{1S} waarmee het punt s vastligt.



$$|T| = 87 \text{ (opgemeten) indien } |U_{12}| = |U_{23}| = |U_{31}| = 20.$$

$$|N| = 7,8$$

$$\left| \frac{T}{N} \right| = 11,2$$

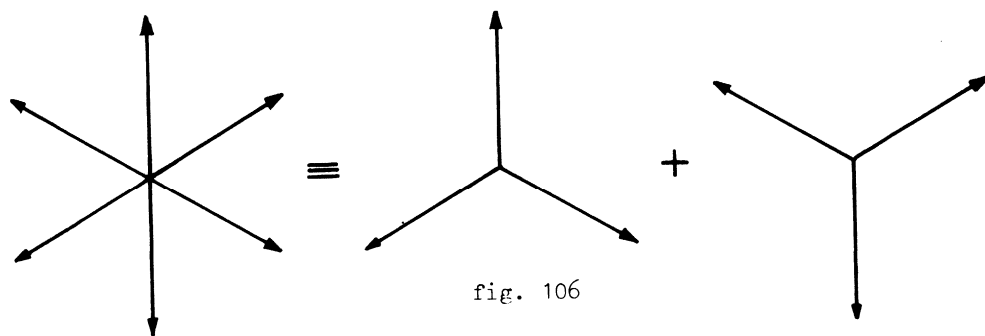
Na de constructie van U_{1S} wordt de wijzer evenwijdig aan zichzelf verplaatst tot de punten 1 samenvallen.

6.6. Slotopmerkingen

Behalve symmetrische driefasensystemen zijn ook symmetrische n-fasensystemen mogelijk, waarbij de amplituden van de bronsterkten gelijk zijn en het faseverschil tussen één fase en de daarop volgende fase $\frac{2\pi}{n}$ bedraagt.

Opgave: Toon aan dat de som van de spanningen nul is. Toon ook aan dat de sinusvormige component in de som van de kwadraten van de spanningen (reële functies van de tijd) nul is.

Dergelijke systemen met $n \neq 3$ komen zelden in de praktijk voor. Bij hoge waarden van n wordt de constructie van de machines ingewikkeld en is de besparing van koper en ijzer t.o.v. een driefasensysteem met dezelfde vermogenscapaciteit bijzonder gering. Is n even, dan heeft iedere bronspanning een tegenhanger die 180° in fase verschoven is. Als de bronnen in ster worden geschakeld dan zijn $\frac{1}{2} n$ van de lijnspanningen gelijk nul. Het systeem is als het ware de superpositie van twee symmetrische $\frac{1}{2} n$ - fasensystemen die elkaars spiegelbeeld zijn.



Zo'n feitelijk dubbele uitvoering is zelden zinvol. Een bijzonder geval is wanneer $n = 4$. Twee van de fasen worden weggelaten en er blijven twee fasen over met een faseverschil van 90° . Met zo'n systeem is het mogelijk een draaiend magnetisch veld op te wekken. Zo'n systeem wordt vaak toegepast bij elektrische motoren van gering vermogen (bv. $< 0,5$ kW). De voeding is van een enkele fase; de tweede fase wordt verkregen m.b.v. een condensator. Zo'n systeem heet een twee-fasensysteem maar is niet symmetrisch.

Vraag: Als de effectieve fasespanning 220 V bedraagt, hoe groot is de amplitude van de lijnspanning bij een symmetrisch driefasensysteem? Met het oog op de veiligheid denk aan deze waarde als U met driefasensystemen werkt!

HOOFDSTUK VII : TRANSFORMATOREN

7.1. Inleiding.

Tot dusverre hebben wij gewerkt met de elementen weerstand, condensator, spoel, sapningsbron en stroombron. Deze elementen werden geabstraheerd door idealisering van bepaalde fysische verschijnselen. Wij zullen nu nader ingaan op de wisselwerking tussen stromen en magnetische velden en hieruit een nieuw element afleiden. Wij hebben reeds bij de invoering van de spoel iets over deze elektromagnetische werking besproken. Het gaat nu vooral om wat er gebeurt als er meer dan een stroom in de omgeving van hetzelfde magnetische veld vloeit.

7.1.1. Magnetische velden

Iedere stroom geeft aanleiding tot een magnetisch veld dat zich door de hele ruimte uitbreidt. De sterkte van zo'n veld is evenredig aan de stroomsterkte en afhankelijk van de geometrische configuratie van de wikkelingen waardoor de stroom vloeit. Is er meer dan een stroom, dan geeft iedere stroom aanleiding tot een magnetisch veld met de hierboven beschreven eigenschappen. Het totale magnetische veld is dan de superpositie van al de magnetische velden die door de stromen afzonderlijk worden veroorzaakt. De veldsterkte van dit totale veld van de stromen is de vectorische som van de sterkten van de deelvelden. Deze veldsterkte wordt aangeduid met het symbool \underline{H} (een vector).

Dit \underline{H} -veld beïnvloedt het gedrag van magnetische materialen, waarin het \underline{H} -veld aanwezig is door verschuivingen en heroriënteringen van de atomaire stromen in het magnetisch materiaal. Ieder van deze atomaire stromen veroorzaakt een magnetisch veld. Microscopisch bekeken (op atomair niveau) vinden wij een nieuw totaal \underline{H} -veld t.g.v. de atomaire stromen en de macroscopische stromen in de wikkelingen. Wanneer wij dit veld op macroscopisch niveau bekijken (dus in wezen een soort gemiddeld totaal veld over een groot aantal atomen) dan nemen wij het z.g. \underline{B} -veld of het magnetisch-inductie- of het flux-dichtheidveld waar. Op praktische gronden wordt in het Giorgistelsel het \underline{B} -veld niet in dezelfde eenheden uitge-

drukt als het \underline{H} -veld. Nu is het verband tussen het \underline{H} -veld en het \underline{B} -veld in het algemeen niet-lineair. Dit houdt in dat als een \underline{H} -veld met sterkte \underline{H}_1 een \underline{B} -veld met sterkte \underline{B}_1 veroorzaakt, en een veld \underline{H}_2 een veld \underline{B}_2 veroorzaakt, dan, bij gelijktijdig optreden van de twee velden, is $\underline{H} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2$ maar is $\underline{B} \neq \underline{B}_1 + \underline{B}_2$. Bij geschikt gekozen magnetische materialen en bij geschikt gekozen werkgebied van de karakteristieken is het mogelijk in eerste benadering een lineaire karakteristiek te verkrijgen, zodat $\underline{B} = \mu \underline{H}$, waarin μ een constante is.

De door een wikkeling omvatte flux is de integraal van de normaalcomponent van \underline{B} over een oppervlak dat door de wikkeling begrensd is. Wij schrijven $\phi = \iint \underline{B} \cdot \underline{\hat{n}} \, dA$, waarin $\underline{\hat{n}}$ de eenheidsvector loodrecht op het oppervlak A is en zo gericht dat de positieve richting van de omtrek van A rechts om de vector $\underline{\hat{n}}$ is gericht.

Met deze summiere gegevens wordt de student herinnerd aan dat deel van de electriciteitsleer dat bij de behandeling van de stof van dit hoofdstuk als nodige fysische achtergrond geldt.

7.1.2. Wederzijdse inducties

In iedere wikkeling is de spanning die door verandering in de flux optreedt gelijk aan $u = \frac{d\phi}{dt}$, waarbij uitgegaan wordt van de tekenafspraken van § 3.9.2.

Wij bekijken het geval dat de flux in een wikkeling ontstaat t.g.v. twee stromen in twee aparte wikkelingen. Wanneer het magnetisch medium lineair is, kunnen wij voor de twee wikkelingen schrijven (fig. 107):

$$u_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d}{dt} (\phi_{11} + \phi_{12}), \quad \phi_{11} = L_{11} i_1, \quad \phi_{12} = L_{12} i_2,$$

$$u_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d}{dt} (\phi_{21} + \phi_{22}), \quad \phi_{21} = L_{21} i_1, \quad \phi_{22} = L_{22} i_2,$$

zodat

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}.$$

Hierin komt tot uitdrukking dat de flux die door iedere wikkeling wordt omvat de superpositie van twee fluxen is, waarvan ieder evenredig is aan een stroom. Deze evenredigheidsrelatie is onafhankelijk van de aanwezigheid van de andere stroom. Wij veronderstellen dat de onderlinge ligging van de wikkelingen niet verandert in de tijd. De grootheden

L_{ij} ($i, j = 1, 2$) zijn dan constanten.

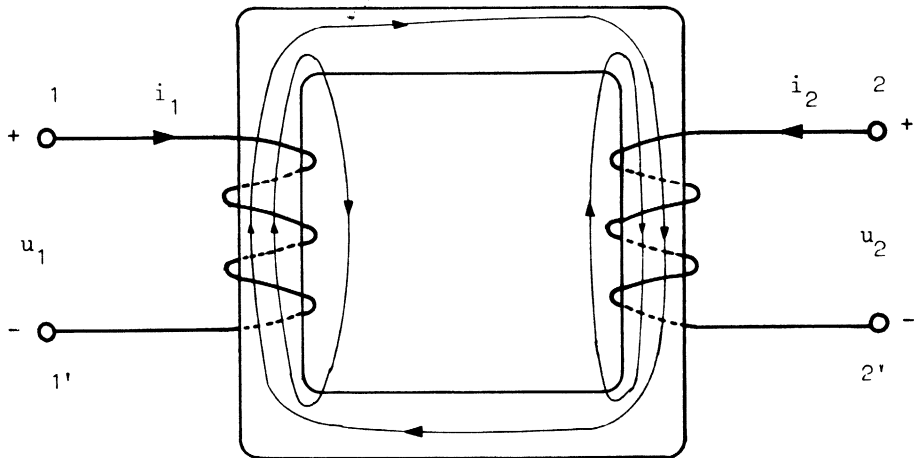


fig. 107

Wij noemen de constanten L_{11} en L_{22} coëfficiënten van zelf-inductie, of kortweg zelf-inductie. Als $i_2 = 0$, dan vloeit er slechts één stroom. Wij zijn dan terug in de situatie van § 3.9.2. waar wij met de eenvoudige spoel te maken hebben. De constanten L_{12} en L_{21} noemen wij de coëfficiënten van wederzijdse inductie, of kortweg wederzijdse inductie. Zij worden evenals de zelf-inductie in henry uitgedrukt.

Wanneer twee wikkelingen op deze manier in wisselwerking met hetzelfde magnetisch veld staan, dan spreken wij van gekoppelde spoelen.

In deze hele discussie moeten de woorden magnetisch medium of magnetisch materiaal ruim worden geïnterpreteerd. Wij verstaan hieronder een medium waarin een magnetisch veld kan bestaan en van sterkte of richting kan veranderen. Hieronder vallen dus lucht en het vacuüm. Wan-

neer de verhouding $\mu_1/\mu_0 \gg 1$, waarin μ_1 de verhouding B/H in een materiaal, en μ_0 de verhouding B/H in vacuo is, dan spreekt men van ferromagnetisme van het materiaal. Gekoppelde spoelen worden vaak gewikkeld op ferromagnetische kernen. Andere materialen worden echter ook gebruikt - vooral voor toepassingen bij hoge frequenties - waarvan de μ nauwelijks verschilt van de μ van het vacuüm.

Wanneer het magnetisch medium niet-lineair is zullen functionele relaties tussen de omvatte fluxen ϕ_1 en ϕ_2 enerzijds en de stromen anderzijds bestaan. In vele - maar lang niet alle - gevallen mogen wij schrijven

$$\phi_1 = \phi_1(i_1, i_2), \quad \phi_2 = \phi_2(i_1, i_2).$$

$$\text{Dan geldt: } u_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial\phi_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial\phi_1}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial\phi_2}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial\phi_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}.$$

De partiële differentiaalcoëfficiënten zijn in het algemeen functies van i_1 en i_2 . Deze vergelijkingen vormen het uitgangspunt voor de studie van verscheidene magnetische versterkers, magnetische transductors en parametrische versterkers. Bij dergelijke studies spelen speciale eigenschappen van de materialen een belangrijke rol.

7.2. Energie-relaties

Wij zullen nu aan de hand van beschouwingen over de magnetische energie van twee gekoppelde spoelen relaties tussen de inductie-coëfficiënten afleiden. Allereerst merken wij op dat in overeenstemming met §3.9.3., onder de voorwaarden van de daar gemaakte tekenafspraken, L_{11} en L_{22} positief zijn. Wanneer $i_2 \equiv 0$, of $i_1 \equiv 0$, hebben wij met een enkele spoel te maken.

Verder is de energie, die aan zo'n stelsel spoelen in het tijdsinterval (t_1, t_2) wordt toegevoerd, gelijk aan

$$\begin{aligned}
w &= \int_{t_1}^{t_2} (u_1 i_1 + u_2 i_2) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + L_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt} \right) dt + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(L_{12} \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left((L_{21} - L_{12}) i_2 \frac{di_1}{dt} \right) dt \\
w &= \frac{1}{2} \left(L_{11} i_1^2 + L_{22} i_2^2 \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + L_{12} (i_1 i_2) \Big|_{t_1}^{t_2} + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left((L_{21} - L_{12}) i_2 \frac{di_1}{dt} \right) dt.
\end{aligned}
\tag{7.2.1.}$$

Wij zullen nu bewijzen dat $L_{12} = L_{21}$. Stel dat $L_{12} < L_{21}$. Wij verbinden nu twee stroombronnen aan de klemmen 1,1', respectievelijk 2,2' (fig. 107), zodat $i_1 = \cos t$, $i_2 = \sin t$. Dan zijn i_1 en i_2 begrensde grootheden zodat de termen buiten de integraal in verg. 7.2.1. begrensd zijn. De integraal-term echter is

$$\begin{aligned}
&- \int_{t_1}^{t_2} \left((L_{21} - L_{12}) \sin^2 t \right) dt \\
&= -\frac{1}{2} (L_{21} - L_{12})(t_2 - t_1) + \frac{1}{4} (L_{21} - L_{12}) \sin 2t \Big|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

Als $t_2 \rightarrow \infty$, is deze term onbegrensd negatief. Dat betekent dat wij met deze opstelling een onbeperkte hoeveelheid energie uit de gekoppelde spoelen kunnen onttrekken. Zo'n situatie is in strijd met alle fysische ervaring,

zodat wij moeten concluderen dat de veronderstelde relatie $L_{21} > L_{12}$ vals is.

Indien $L_{12} - L_{21} > 0$, dan kiezen wij $i_1 = \sin t$, $i_2 = \cos t$. Het gevolg is dat de integraalterm onbegrensd negatief wordt als $t_2 \rightarrow \infty$, zodat er weer een tegenspraak met de fysische ervaring ontstaat. De conclusie is dus $L_{12} = L_{21}$.

Vaak schrijft men M in plaats van L_{12} en L_1, L_2 in plaats van L_{11} respectievelijk L_{22} . Als wij nu afspreken dat het nulniveau van de magnetische energie overeenkomt met die toestand waarbij beide stromen nul zijn - evenals dit in het geval van de enkelvoudige spoel gebeurd is - dan is de energie gelijk aan

$$w_m = \frac{1}{2} \{L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M i_1 i_2\}.$$

Indien $L_1 \neq 0$, is

$$w_m = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sqrt{L_1} i_1 + \frac{M}{\sqrt{L_1}} i_2 \right)^2 + \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \right\}.$$

Het is een experimenteel feit dat de energie zoals deze hier gedefinieerd is nooit negatief kan zijn. D.w.z. gekoppelde spoelen kunnen energie opslaan, maar kunnen nooit een netto energie leveren als in een fysisch proces uitgegaan wordt van een begintoestand waarin beide stromen nul zijn.

Wij kunnen dus stellen dat $w_m \geq 0$ voor alle i_1 en i_2 . Dit is slechts mogelijk als geen van beide termen negatief is. Hiervoor is nodig en voldoende, dat

$$L_2 L_1 - M^2 \geq 0. \quad (7.2.2.)$$

Indien $L_1 = 0$, maar $L_2 \neq 0$, dan vervangen wij de indices 1 en 2 in deze afleiding. Als $L_1 = L_2 = 0$, dan moet $M = 0$ zijn. In alle gevallen is dus de relatie (7.2.2.) nodig en voldoende voor het niet-negatief zijn van w_m .

7.3. Gekoppelde spoelen.

Bezien van het netwerktheoretisch standpunt, definiëren wij een systeem van twee (ideale) gekoppelde spoelen als een twee-klemmenpaarnetwerk, waarvan de spanningen en stromen aan ieder klemmenpaar aan de volgende rela-

ties voldoen:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (7.3.1.)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} ,$$

waarbij, indien de positieve stroom-richtingen en spanningspolariteiten volgens fig. 108 worden gekozen,

$$L_{11} \geq 0 \text{ en } L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0.$$

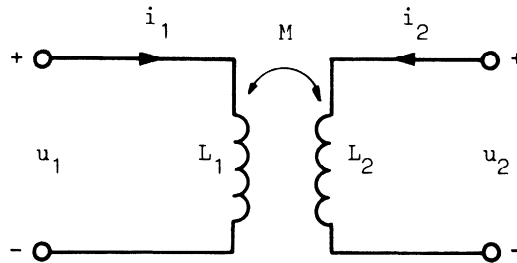


fig. 108

Hieruit volgt dat $L_{22} \geq 0$, zodat deze voorwaarde niet expliciet behoeft te worden vermeld. Het symbool voor ideale gekoppelde spoelen wordt in fig. 108 gegeven. Zoals gebruikelijk in de netwerktheorie laten wij het woord ideaal weg als het begrip eenmaal is vastgelegd.

Voortaan zullen wij het woord poort gebruiken in plaats van klemmen-paar. Essentiëel bij een poort is de voorwaarde dat de toevloeiende stroom van buiten het netwerk naar de ene klem gelijk is aan de afvloeiende stroom van de andere klem naar buiten. Deze voorwaarde heet de poort-voorwaarde; hieraan wordt automatisch voldaan door gekoppelde spoelen.

Bij niet ideale gekoppelde spoelen - d.w.z. reële fysische apparaten - komen naast de zuiver magnetische werking ook de effecten van omzetting van elektrische energie in warmte voor, t.g.v. de weerstand van de bedrading en verliezen in de magnetisch kern, alsmede capaci-

tieve effecten t.g.v. het naast elkaar liggen van de wikkelingen en de niet-lineaire effecten van de magnetische kern. Men kan vervangings-schema's opstellen, bestaande uit de ideale elementen, waarmee het mogelijk is rekening te houden met alle significante lineaire effecten. Op deze voor de elektrotechniek belangrijke aspecten gaan wij in dit college niet verder in maar beperken ons tot de nulde-ordebenadering van ideale gekoppelde spoelen.

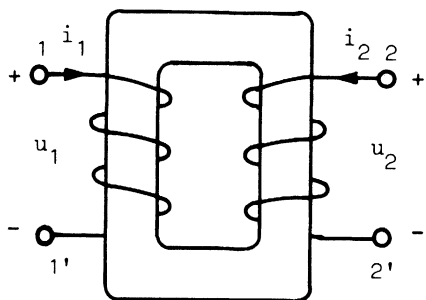
7.4. Het teken van M; tekenafspraken

Uit het voorgaande blijkt dat op grond van energiebeschouwingen het niet mogelijk is enige conclusie aan het teken van M te verbinden. Dit wordt ook duidelijk als wij naar fig. 108 kijken. Keren wij de positieve stroomrichting en de positieve spanningspolariteit van poort 2 om, dan worden u_2 en i_2 door $-u_2$ en $-i_2$ in verg. (7.3.1.) vervangen. Er volgen de vergelijkingen:

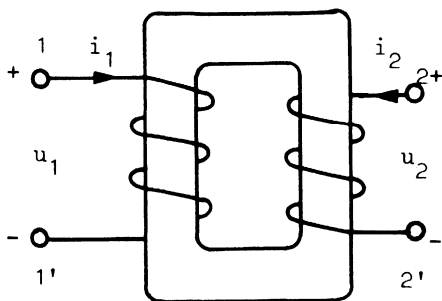
$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt},$$

zodat het teken van de coëfficiënt van $\frac{di_2}{dt}$ in de eerste en $\frac{di_1}{dt}$ in de tweede vergelijking afhankelijk is van de onderlinge oriëntatie van de poorten. De fysische achtergrond hiervan wordt in fig. 109 toegelicht. In fig. 109a zijn de twee wikkelingen zo gewikkeld dat wanneer de poortstromen in de voor hen als positief afgesproken richtingen vloeien, beide stromen het vensteroppervlak van de kern snijden in dezelfde richting. Volgens de wetten van de elektriciteitsleer geven de stromen aanleiding tot een flux in de kern die rechts om de stroomrichting is gericht. De twee deelfluxen t.g.v. de stromen tellen op zodat de totale door wikkeling 1 omvatte flux ϕ , groter is dan iedere deelflux ϕ_{11} , ϕ_{12} alleen. Het gevolg is dat in de spanningsvergelijkingen de coëfficiënten van de afgeleiden van de stromen allemaal positief zijn.

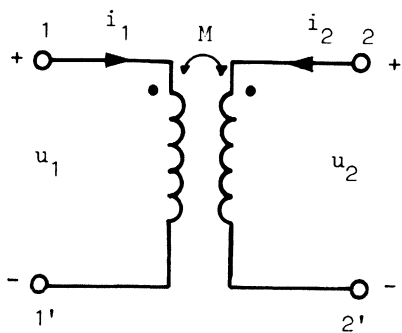


a.

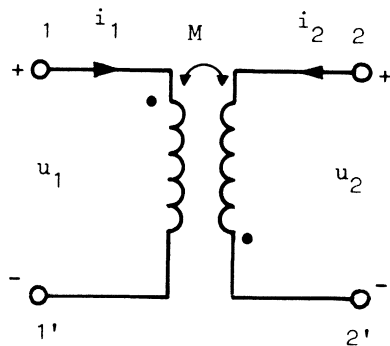


b.

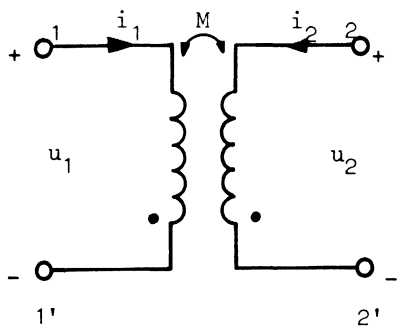
fig. 109



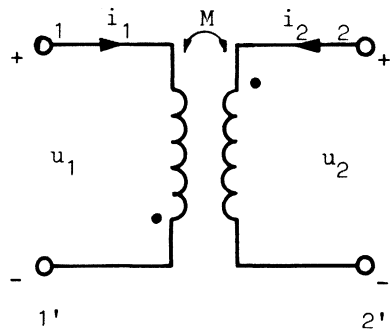
a.



b.



c.



d.

fig. 110

In fig. 109b daarentegen, zijn de positieve stroomrichtingen zo gekozen dat wanneer de stromen in deze richtingen vloeien het vensteroppervlak van de kern in tegenovergestelde richtingen door de stromen wordt gesneden. De totale flux in de kern is dan gelijk aan het verschil van de twee deelfluxen. Hierdoor komen M-coëfficiënten in de spanningsvergelijkingen voorzien van een negatief voorteken voor.

Om in een netwerkschema aan te geven met welk voorteken de M in de vergelijkingen moet worden voorzien maakt men gebruik van de aanduidingen van fig. 110. In fig. 110a worden de vergelijkingen opgesteld met een plus-voorteken en in fig. 110b met een min-voorteken. Hierbij is het essentieel dat men zich aan de in deze figuur aangegeven tekenafspraken voor positieve spanningspolariteit en stroomrichting van iedere poort houdt. Figuur 110c geeft een aanduiding aan die equivalent is aan fig. 110a; fig. 110d is equivalent aan fig. 110b.

Men lette goed op dat met de hier gegeven interpretatie niets wordt gezegd over de vraag of M zelf een positieve of negatieve grootheid is. De situatie is analoog aan die van § 1.5. waar wij de plus- en mintekens hebben gebruikt om b.v. bij een spanningsbron de positieve polariteit aan te geven; niets wordt gezegd over de vraag of de bronsterkte U_0 een positieve of negatieve grootheid is of niet. Echter wanneer men met een fysisch apparaat, b.v. een accu, te maken heeft dan duiden de plus- en de mintekens aan welke klem de hogere en welke de lagere potentiaal heeft. Het zou nodeloos ingewikkeld zijn de plus- en mintekens om te keren en te zeggen dat de spanning van zo'n accu b.v. -6 V bedraagt. De afspraken m.b.t. positieve polariteit en richting zijn zinvol en bovendien nodig wanneer wij met algebraïsche grootheden moeten werken, waar b.v. in een bepaald probleem niet van te voren bekend is of een grootheid U_0 positief of negatief is.

Eveneens met gekoppelde spoelen: in een netwerkschema waarbij er gewerkt wordt met algebraïsche symbolen houden wij ons aan de afspraken van fig. 110. Hebben wij echter te maken met gekoppelde spoelen als fysisch apparaat waarvan de wikkelingen geheel ingesloten zijn en alleen de klemmen uitwendig te bereiken zijn, dan geeft men op het appa-

raat zelf met twee stippen aan het equivalent van de schema's van fig. 110 onder de uitdrukkelijke afspraak dat de wederzijdse inductie een positieve grootheid is. Ook hier zou het een nodeloze complicatie zijn om de stippen anders op te stellen en dan te vermelden dat M gelijk is aan b.v. -10 mH.

In dit college beperken wij ons tot netwerken, dus houden wij ons aan de afspraken van fig. 110. Natuurlijk is het mogelijk een andere positieve richting of polariteit voor iedere poort af te spreken.

Keren wij b.v. de positieve stroomrichting van poort 1 om zonder de positieve spanningspolariteit te veranderen, dan wordt i_1 overal in de vergelijkingen vervangen door $-i_1$. In een netwerk is het meestal het veiligste uit te gaan van de afspraken en aanduidingen van fig. 110a of b, de standaardvergelijkingen op te schrijven, dan met eventuele vervanging van sommige variabelen door hun negatieve de juiste vergelijkingen voor anders afgesproken positieve richting of polariteit af te leiden.

7.5. Koppeling en lek (spreiding).

Wanneer twee spoelen zodanig worden opgesteld dat het magnetisch veld van de ene spoel niet merkbaar is in de omgeving van de andere spoel, is er geen sprake van gekoppelde spoelen. De twee spoelen zijn volledig ontkoppeld. Tussen een situatie waarin er wel koppeling en een situatie waarin volledige ontkoppeling tussen twee spoelen bestaat zullen zich andere situaties van min of meer zwakke koppeling voordoen. De vraag rijst hoe wij deze verschillende graden van koppeling kunnen aangeven en wat de fysische interpretatie hiervan is.

Het is duidelijk dat de graad van koppeling iets met de parameter M te maken zal hebben; wij weten tenminste dat als M nul is de koppeling ook nul is. Een geschikte maat voor de koppeling blijkt de parameter

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \text{ te zijn, welke wij de } \underline{\text{koppelingsfactor}} \text{ noemen.}$$

Het volgt uit § 7.3. dat $0 \leq k \leq 1$.

Om de fysische betekenis van k te vinden gaan wij uit van de ietwat

geïdealiseerde situatie van fig. 111a:

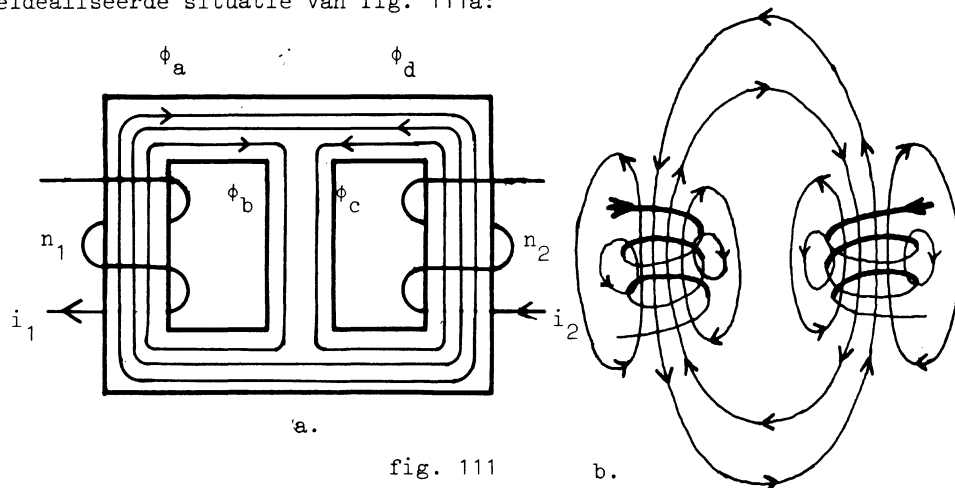


fig. 111

Twee wikkelingen zijn door een ferromagnetische kern gekoppeld. Wij noemen de ene wikkeling de primaire en de andere de secundaire wikkeling. Wij veronderstellen dat alle magnetische flux zich in de kern bevindt. Zoals is aangegeven bestaat de flux in de kern uit vier delen die wij ϕ_a , ϕ_b , ϕ_c , ϕ_d noemen.

De door de primaire stroom veroorzaakte flux bestaat uit twee delen, nl. een deel ϕ_a dat wel en een deel ϕ_b dat niet door de secundaire wikkeling wordt omvat. Eveneens bestaat de door de secundaire stroom veroorzaakte flux uit een deel ϕ_d dat wel en een deel ϕ_c dat niet door de primaire wikkeling wordt omvat. Wij kunnen dan schrijven, met inachtneming van de afspraken voor positieve richtingen van fig. 111:

$$L_1 i_1 = \phi_{11} = n_1 (\phi_a + \phi_b), \quad M i_2 = \phi_{12} = -n_1 \phi_d$$

$$M i_1 = \phi_{21} = -n_2 \phi_a, \quad L_2 i_2 = \phi_{22} = n_2 (\phi_c + \phi_d),$$

waarin n_1 het aantal windingen van de primaire en n_2 het aantal windingen van de secundaire wikkeling is. Dan is

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\phi_a \phi_d}{(\phi_a + \phi_b)(\phi_c + \phi_d)}, \quad \text{mits } i_1 i_2 \neq 0.$$

par.7.5.

Hieruit blijkt duidelijk waarom $k^2 \leq 1$. De fluxen ϕ_a en ϕ_b die afkomstig zijn van dezelfde stroom moeten gelijke tekens hebben, zodat

$$|\phi_a + \phi_b| \geq |\phi_a| \text{ en } |\phi_c + \phi_d| \geq |\phi_d| .$$

De flux $\phi_b + \phi_c$, die niet door beide wikkelingen wordt omvat, heet de lekflux of spreidingsflux. Een maat voor de graad van lekkage is de lek-

factor $\sigma = 1 - k^2 = \frac{\phi_a \phi_c + \phi_b \phi_c + \phi_b \phi_d}{(\phi_a + \phi_b)(\phi_c + \phi_d)} .$

Als $\sigma = 0$, dan is $\phi_a \phi_c + \phi_b \phi_c + \phi_b \phi_d = 0$, d.w.z. $\phi_c(\phi_a + \phi_b) + \phi_b \phi_d = 0$.

Maar ϕ_c en ϕ_d zowel als ϕ_a en ϕ_b hebben gelijke tekens, zodat de enige mogelijkheid is $\phi_b = \phi_c = 0$. Een lekfactor nul komt inderdaad overeen met geen lekflux. In zo'n geval zeggen wij dat de spoelen volmaakt gekoppeld zijn. Dan is

$$\frac{M}{L_1} = \frac{-n_2}{n_1} \text{ en } \frac{M}{L_2} = \frac{-n_1}{n_2}$$

Vraag: Blijkbaar is M negatief. Waarom? Hoe kan men een positieve M bij volmaakt gekoppelde spoelen krijgen?

Zo'n situatie wordt nooit in de praktijk bereikt, maar kan heel dicht worden benaderd; een lekfactor van 0,01 of kleiner behoort tot de fysische mogelijkheden.

Als $\sigma = 1$, dan is $k^2 = 0$, zodat $M = 0$. De spoelen zijn volledig ontkoppeld en $\phi_a = \phi_d = 0$.

Figuur 111b laat enige mogelijke fluxlijnen zien als de kern niet ferromagnetisch is. Wij kunnen niet meer schrijven $\phi_{11} = n_1(\phi_a + \phi_d)$ enz. daar niet elke winding van een wikkeling dezelfde flux omvat. De algemene conclusies over lek en koppeling blijven echter geldig.

Fluxlijnen vormen gesloten krommen. Een gevolg hiervan is dat in een magnetische structuur zoals de kern van fig. 111 de fluxen in de verschillende benen van de kern aan dezelfde wet beantwoorden als elektrische stromen in een netwerk, nl. de stroomwet van Kirchhoff. Dit feit komt

tot uiting bij het gebruik van de fluxen $\phi_a, \phi_b, \phi_c, \phi_d$ die op maasstromen lijken. Er bestaat ook een analogon van de spanningswet van Kirchhoff:

$$I = \int \underline{H} \cdot d\underline{l}$$

waarin deze lijnintegraal langs een gesloten weg wordt berekend die een totale stroom I omvat. Daar

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \underline{B} \text{ en } \phi = \iint \underline{B} \cdot \hat{n} dA,$$

is het mogelijk een netwerktheorie van de magnetische structuur op te bouwen die precies analoog is aan de theorie der elektrische netwerken. Hierin speelt I in de magnetische netwerken dezelfde rol als de spanningsbronsterkte U_0 in de elektrische netwerken. Voor nadere toelichting over deze begrippen zij verwezen naar de colleges "elektriciteit".

7.6. Het begrip transformator

Wanneer gekoppelde spoelen worden gebruikt in de elektrotechniek om een bepaald doel zoals spanningsverhoging te realiseren, spreekt men van een transformator. Als men over gekoppelde spoelen spreekt dan denkt men in eerste instantie aan het verschijnsel van de wederzijdse inductie en de daarmee samenhangende eigenschappen. Een transformator daarentegen is een apparaat dat speciaal voor een technisch doel is geconstrueerd. De dimensionering van de transformator hangt van het doel af. Bijvoorbeeld, als alle stromen en spanningen sinusvormig zijn, dan kunnen wij met de gebruikelijke notatie van complexe grootheden schrijven:

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$U_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2.$$

Schakelt men een spanningsbron aan poort 1 dan krijgt men een spanning aan poort 2 bij open poort ($I_2 = 0$):

$$U_2 = \frac{M}{L_1} U_1. \text{ Door } M \text{ en } L_1 \text{ geschikt te kiezen kan elke gewenste}$$

spanning, binnen brede grenzen, worden gerealiseerd, uitgaande van een gegeven bronsterkte. Of men kan een stroombron aan poort 1 schakelen

en bij kortgesloten secundaire ($U_2 = 0$) een stroom $I_2 = \frac{-M}{L_1} I_1$ realiseren.

Naast deze eigenschappen van spannings- of stroomtransformatie, heeft de transformatie de eigenschap van galvanische isolatie. D.w.z. er is geen elektrische verbinding tussen de wikkelingen, zodat het mogelijk is om grote potentiaalverschillen tussen een primaire klem en een secundaire klem te hebben zonder dat de werking als transformator merkbaar wordt gestoord. Hiervan maakt men gebruik in de isolerende transformator, waarbij o.a. een niet geaard apparaat kan worden gevoed uit een fase van een drie-fasensysteem met geaarde nulleider. Hierdoor kan bij een isolatiefout in het apparaat de massa van het apparaat in verbinding komen te staan met de secundaire van de transformator, zonder dat een persoon die het apparaat en de grond met een lichaamsdeel aanraakt, hierdoor in gevaar komt.

Een bijzondere - en goedkope vorm van transformator is de autotransformator. Deze bestaat uit een enkele wikkeling met variabel te kiezen aftakpunten (fig. 112).

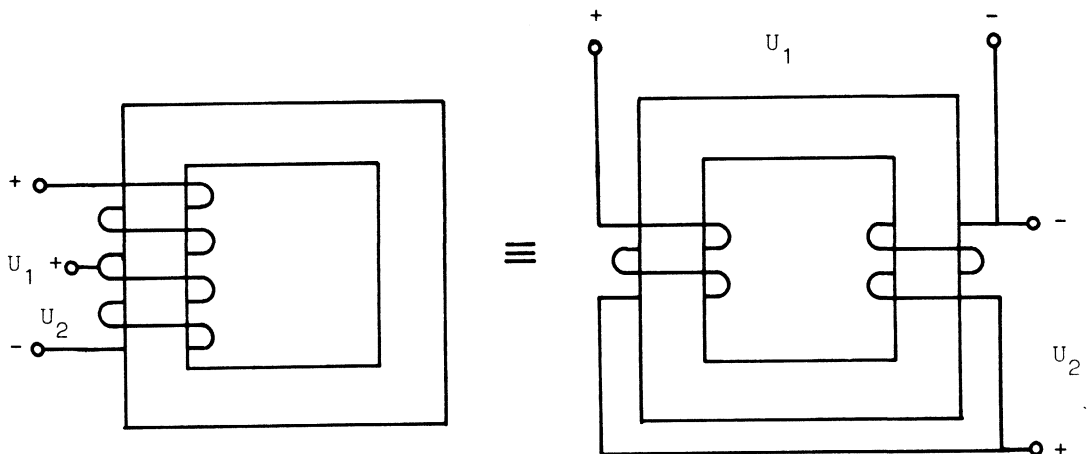


fig. 112

Het voordeel is dat de spanningstransformatieverhouding gevariëerd kan worden door het aftakpunt te variëren. Een nadeel (bij sommige toepassingen) is echter dat de wikkelingen niet galvanisch gescheiden zijn.

Vraag: Wat is het teken van M bij de afspraken van fig. 112?

Een bijzondere vorm van autotransformator is de z.g. "variac". Transformatoren met een gemeenschappelijke klem, zoals de autotransformator zijn equivalent aan het schema van fig. 113.

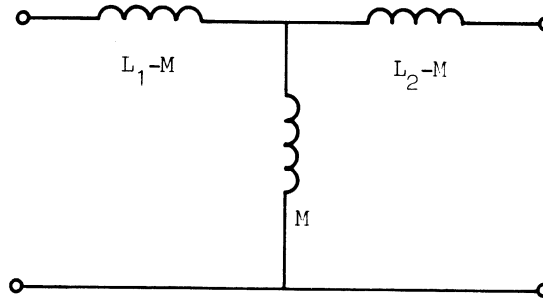


fig. 113

Opgave: Toon de juistheid van deze bewering aan.

Men moet wel bedenken dat het schema in eerste instantie een reken-schema is; er is geen garantie dat alle zelf-inducties positief zijn. Dit maakt voor het berekenen van netwerken met zo'n schema als onderdeel niets uit, maar betekent wel dat het in vele gevallen onmogelijk is zo'n schema te bouwen met fysische spoelen. Wij kunnen echter aantonen dat hoogstens één van de zelf-inducties negatief is. Als $M < 0$, dan is $L_1 - M > 0$ en $L_2 - M > 0$. Als $L_1 - M < 0$, dan is $M > L_1 > 0$. Daar $k^2 \leq 1$ moet dan $M < L_2$, zodat $L_2 - M > 0$. Op dezelfde wijze als $L_2 - M < 0$, dan is $L_1 - M > 0$.

Opgave: Bewijs dat bij volmaakte koppeling één van de zelf-inducties negatief moet zijn.

7.7. Voorbeelden van netwerken met transformatoren

De maas-vergelijkingen zijn

$$U_1 = (R + j\omega L_1 + 1/j\omega C) I_1 - (j\omega M + \frac{1}{j\omega C}) I_2. \quad (\text{fig. 114})$$

$$0 = -(j\omega M + \frac{1}{j\omega C}) I_1 + (j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} + Z) I_2 .$$

De spanningsoverdracht $H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ volgt dan met $U_2 = ZI_2$.

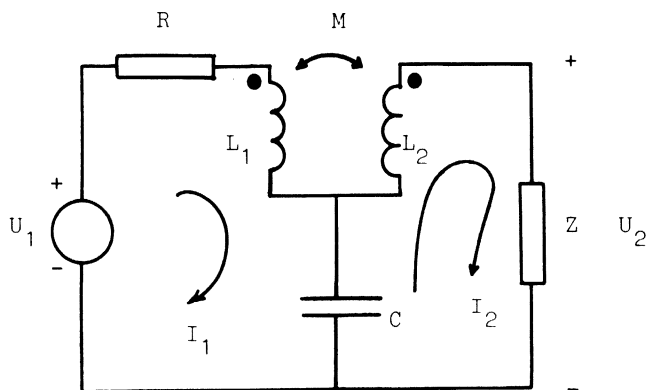


fig. 114

Een tweede voorbeeld

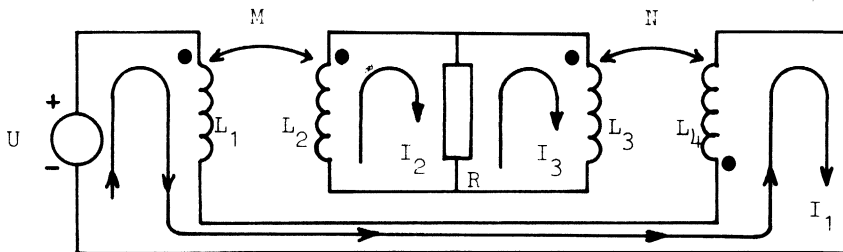


fig. 115

De maasvergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} U &= \lambda(L_1+L_4) I_1 & - & \lambda M I_2 & + & \lambda N I_3 \\ 0 &= -\lambda M I_1 & + & (R+\lambda L_2) I_2 & - & R I_3 \\ 0 &= \lambda N I_1 & - & R I_2 & + & (R+\lambda L_3) I_3, \end{aligned}$$

welke op de gebruikelijke wijze kunnen worden opgelost.

Een derde voorbeeld:

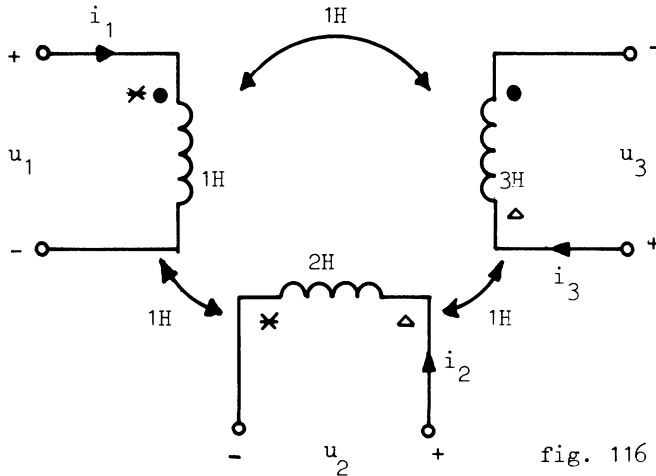


fig. 116

De vergelijkingen voor dit stelsel gekoppelde spoelen zijn

$$U_1 = \lambda I_1 - \lambda I_2 - \lambda I_3$$

$$U_2 = -\lambda I_1 + 2\lambda I_2 + \lambda I_3$$

$$U_3 = -\lambda I_1 + \lambda I_2 + 3\lambda I_3 .$$

In dit laatste voorbeeld zijn er drie wikkelingen die onderling magnetisch gekoppeld zijn. Zo'n transformator is te realiseren door drie wikkelingen aan te brengen op een kern zoals in fig. 107 of fig. 111. Voor iedere wederzijdse inductie is er een apart tekenpaar in het schema aangebracht.

De juiste voortekens van de wederzijdse inducties kunnen nader bepaald worden door iedere stroom beurtelings gelijk nul te stellen en de vergelijkingen van de drie resulterende twee-wikkelingstransformatoren te bepalen. De vergelijkingen van het complete netwerk worden dan gevonden door de (literale) coëfficiënten van de complete vergelijkingen, bij het beurtelings nul stellen van de stromen, met de coëfficiënten

praktische situaties. Wij kunnen dit proces van $L_1 \rightarrow \infty$ terwijl $L_1 L_2 = M^2$ het gemakkelijkst voorstellen door te veronderstellen dat $\mu \rightarrow \infty$. Zoals wij in § 7.1. vermeld hebben is $\int u \, dt \propto \phi \propto B = \mu H \propto \mu i$,

zodat $L_1 \propto \mu$. Als $\mu \rightarrow \infty$, blijft $\frac{M}{L_1} = \frac{n_2}{n_1}$ constant. *

Wij kunnen dan schrijven: $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \frac{u_1}{L_1} = 0 = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt}$

Wij hebben dan de volgende twee vergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} (i_1 + n i_2) = 0, \text{ zodat } i_1 + n i_2 = K \text{ en } u_2 = n u_1,$$

waarin $n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{M}{L_1}$. Uit deze gegevens is de integratie-constante niet

te bepalen. Wij onderzoeken eerst het speciale geval dat de constante nul is. Dan definiëren de vergelijkingen

$$u_2 = n u_1, \quad i_1 + n i_2 = 0,$$

een nieuw tweepoortelement dat wij de ideale transformator noemen.

Laten wij goed nagaan wat dit betekent. De vijf soorten netwerkelementen waarmee wij tot dusverre gewerkt hebben, hebben de volgende eigenschappen. Zij zijn alle gekarakteriseerd door een parameter:

U_0, I_0, R, L, C . Geen element is equivalent aan een combinatie van de andere elementen. Wij hebben dit niet bewezen maar na enig nadenken zal het wel heel goed aannemelijk zijn dat het onmogelijk is een vergelijking zoals $u = L \frac{di}{dt}$ te krijgen uit een stelsel vergelijkingen van de

vorm $U = Ri, \quad i = C \frac{du}{dt}$ of u, i is constant. Bovendien is het nauwe-

lijks voorstelbaar dat wij de elementen konden samenstellen uit andere nog eenvoudige geïdealiseerde apparaten met dezelfde algemene eigenschappen. Bijvoorbeeld, het lijkt essentiëel dat ieder element wordt gekarakteriseerd door tenminste één parameter. Alleen de kortsluiting ($u = 0$) en de open tak ($i = 0$) worden gekarakteriseerd door een vergelijking zonder parameter.

*) Het symbool \propto betekent: is evenredig aan.

In dit licht bezien is de ideale transformator zoals gedefinieerd een acceptabel netwerkelement terwijl een stelsel gekoppelde spoelen met drie parameters of een stelsel volmaakt gekoppelde spoelen met twee parameters geen netwerkelement in deze betekenis kan zijn. Ook van een ander standpunt bezien is het aantrekkelijk de ideale transformator als netwerkelement te beschouwen. De vergelijkingen geven weer twee van de meest nuttige eigenschappen van transformatoren voor de elektrotechniek, nl. de eigenschap van spannings- en stroomtransformatie, maar nu zonder beperking van open- respectievelijk kort-gesloten secundaire. De galvanische isolatie geldt ook voor de ideale transformator daar deze eigenschap niet verandert als $\mu \rightarrow \infty$. Dit als abstract begrip ingevoerde element vat samen het doel dat wij in een bepaald deel van de elektrotechniek willen bereiken. In werkelijkheid bereiken wij het doel niet helemaal t.g.v. de fysische eigenschappen van de spoelen. De afwijking van het doel beschouwen wij als een parasitair effect dat zo klein mogelijk moet worden gehouden. Hiermede komt meer tot uiting een essentïeel verschil in benadering en denkwijze tussen de techniek waar het doel voorop staat en de zuivere wetenschap - in dit geval de fysica - waar het verschijnsel als studieobject voorop staat.

Met het invoeren van de ideale transformator als abstract object afgeleid uit de idealisering van bepaalde fysische verschijnselen is onze taak niet compleet. Wij moeten nog onderzoeken of m.b.v. dit nieuwe element de bekende verschijnselen kunnen worden aangegeven. Eerst moeten wij een symbool voor de ideale transformator hebben (fig. 117a).

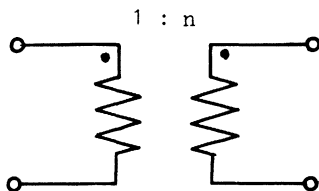


fig. 117a

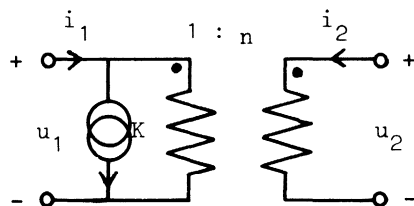


fig. 117b

Men lette goed op de essentiële verschillende wijzen van tekenen van de ideale transformator en gekoppelde spoelen.

Wij kunnen nu de kwestie van de integratie-constante opnemen. Als deze niet nul is dan voldoet het vervangingsschema van fig. 117b aan de vergelijkingen. De constante stelt niets anders dan een stroombron voor.

Tenslotte moeten wij nagaan hoe een stelsel gekoppelde spoelen kan worden vervangen door een ideale transformator en gewone spoelen. Daar-toe herhalen wij de stappen van de afleiding van de ideale transformator in omgekeerde volgorde. Als de spoelen volmaakt gekoppeld zijn, dan is

$$i_1 + ni_2 = \frac{1}{L_1} \int u_1 dt, \quad u_2 = nu_1.$$

De eerste vergelijking zegt dat een bepaalde stroom $i_1 + ni_2$ door een spoel met zelf-inductie L_1 moet vloeien en dat een spanning u_1 resulteert. Deze spanning wordt dan getransformeerd naar u_2 . Het is niet moeilijk in te zien dat deze werking moet overeenkomen met het schema van fig. 118a.

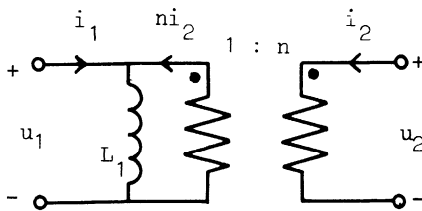


fig. 118a

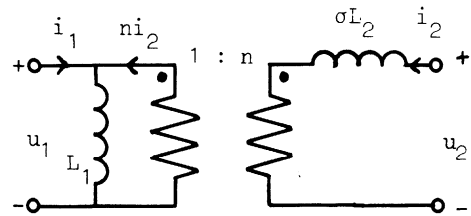


fig. 118b

De volgende stap is de lekflux in rekening te brengen. De stroomvergelijking blijft ongewijzigd; de spanningsvergelijking wordt

$$\begin{aligned} u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{M}{L_1} u_1 + \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt} = nu_1 + L_2 \sigma \frac{di_2}{dt}. \end{aligned}$$

Het schema van fig. 118b resulteert. Wij noemen de zelf-inducties in dit schema als volgt: L_1 heet de primaire magnetiserings-inductie en σL_2 heet de secundaire lekinductie.

Hierdoor is aangetoond dat de ideale transformator het enig nieuwe element is dat wij nodig hebben om vervangingschema's op te stellen die de verschijnselen weergeven die bij twee gekoppelde spoelen optreden. Het kan worden aangetoond - maar wij zullen dat hier niet doen - dat ook bij n gekoppelde spoelen deze ideale transformator het enig benodigde nieuwe netwerkelement is.

Het maakt het geheel begrijpelijker wanneer wij een eenvoudige analogie kunnen vinden. Het mechanische analogon van de ideale transformator is de ideale hefboom (fig. 119).

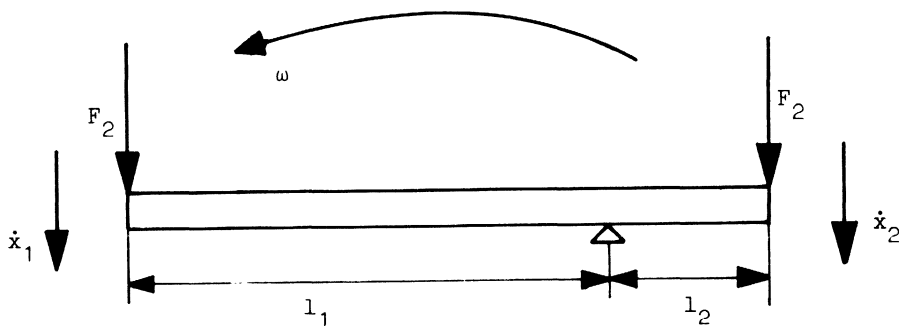


fig. 119

De figuur toont een ideale hefboom die oneindig stijf en licht is. Dan is bij een beweging met eindige hoekversnelling het netto koppel gelijk

nul. Dus $F_1 l_1 = F_2 l_2$, of $F_1 = \frac{l_2}{l_1} F_2$

en $\dot{x}_1 / l_1 = -\dot{x}_2 / l_2 = \omega$, zodat $\dot{x}_1 + \frac{l_1}{l_2} \dot{x}_2 = 0$.

Hierin zijn F_1, F_2 de opgelegde krachten en x_1, x_2 de coördinaten van de aangrijpingspunten van F_1 en F_2 . Deze vergelijkingen zijn van precies dezelfde vorm als die van de ideale transformator als wij de volgende analogieën stellen: kracht \leftrightarrow spanning, snelheid \leftrightarrow stroom. In beide gevallen is het produkt van de gelijksoortige grootheden (beide mechanisch of beide elektrisch) het vermogen.

Met dit model kunnen wij ook rekening houden met de integratie-constante. Hiertoe is het nodig de hele hefboom met een oonstante verticale snelheid te laten bewegen. De constante komt dan overeen met $(1 + n) \dot{x}_0$ waarin \dot{x}_0 de snelheid van het steunpunt van de hefboom is. Als de hefboom niet oneindig licht is moet het traagheidsmoment in de bewegingsvergelijkingen voorkomen. Wij vinden dat de lekinductie overeenkomt met J/l_2^2 waarin J het traagheidsmoment van de hefboom om het steunpunt is. Het is echter niet mogelijk een eenvoudig analogon van de magnetiseringsinductie aan te geven.

7.9. Nadere eigenschappen van de ideale transformator

Eén van de meest opvallende eigenschappen van de ideale transformator, in tegenstelling tot de andere elementen, is het feit dat de ideale transformator niet-energetisch is. Dit wil zeggen dat de ideale transformator geen energie in zichzelf kan opnemen. Dit komt doordat het toegevoegde vermogen identiek nul is:

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_1 (-n i_2) + n u_1 i_2 \equiv 0.$$

Alle vermogen dat de primaire poort opneemt moet worden afgegeven door de secundaire poort. Een niet-ideale transformator kan wel energie dissiperen in de draadweerstand en de kern en ook energie opslaan in de magnetiserings- en lekinductie.

Opgaven: Hoe liggen de energie-relaties bij de ideale en de niet-ideale hefboom?

Kan een ideale transformator een gelijkstroom of spanning transformeren?

Beschrijf aan de hand van het vervangingsschema van fig. 118 de werking van gekoppelde spoelen bij frequentie nul.

Een andere belangrijke eigenschap van de ideale transformator is die van impedantiëtransformatie (fig. 120).

Wanneer de secundaire poort van een ideale transformator wordt afgesloten met een impedantie Z, dan wordt er aan de primaire poort een impedantie $n^2 Z$ waargenomen, waarin n de windingsverhouding van de primaire t.o.v. de secundaire is. Wij hebben $U_1 = nU_2 = -nZI_2 = n^2ZI_1$.

Deze mogelijkheid om het impedantieniveau van een gegeven impedantie te veranderen wordt vaak gebruikt in de elektronica en de communicatietechniek.

Het resultaat kan in twee richtingen worden uitgebreid zoals wordt aangegeven in fig. 121.

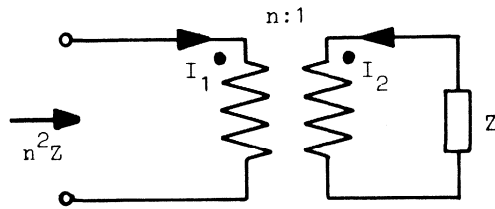


fig. 120

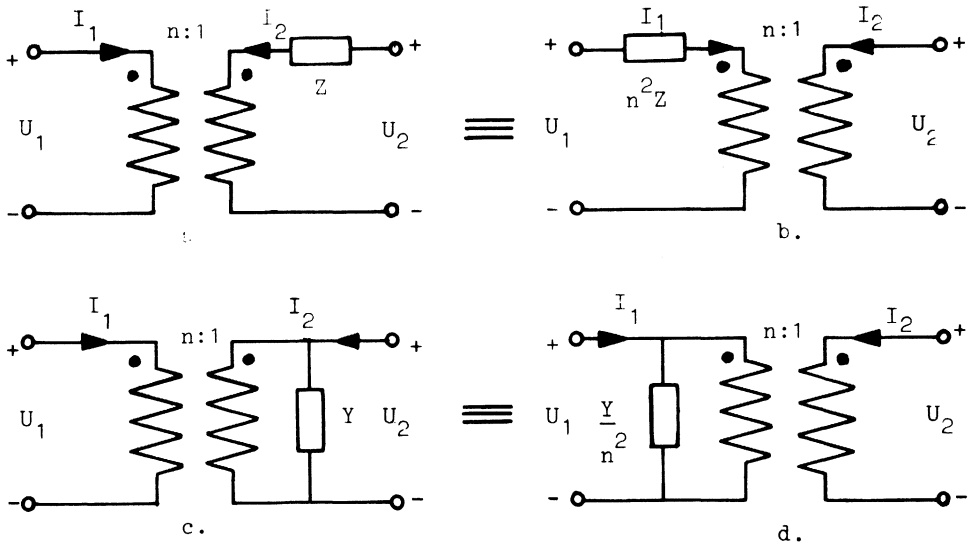


fig. 121

Voor de schakeling van fig. 121a geldt:

$$U_1 = n(U_2 - ZI_2)$$

$$nI_1 + I_2 = 0.$$

Voor fig. 121b. geldt: $U_1 = n^2ZI_1 + nU_2 = -nZI_2 + nU_2$

$$nI_1 + I_2 = 0,$$

zodat deze tweepoortnetwerken equivalent zijn. Dit betekent dat, als er uitsluitend metingen aan de poorten worden verricht, het niet mogelijk is een onderscheid tussen de twee netwerken te maken; zij hebben identieke poortvergelijkingen.

Opgaven: Toon de equivalentie van de tweepoortnetwerken van fig. 121c en d aan.

Leid m.b.v. deze schema's de equivalente vervangingsschema's van fig. 122 voor twee gekoppelde spoelen af.

De ideale transformator is van grote theoretische betekenis in de meer geavanceerde delen van de netwerktheorie. In combinatie met andere elementen kunnen talloze equivalente schakelingen worden afgeleid die bij het ontwerpen van schakelingen waar op praktische gronden niet elke gewenste waarde van een element verkrijgbaar is, bijzonder nuttige alternatieven kunnen bieden. Deze equivalenties worden weergegeven in fig. 123.

Opgave: Reken deze schema's na door de grootheden I_1/U_1 ($U_2 = 0$), I_2/U_2 ($U_1 = 0$), I_2/U_1 ($U_2 = 0$) bij equivalentie b en U_1/I_1 ($I_2 = 0$), U_2/I_2 ($I_1 = 0$), U_2/I_1 ($I_2 = 0$) bij equivalentie c in γ en n uit te drukken.

Vraag: Waarom is het voldoende voor het bepalen van de equivalentie van de tweepoortnetwerken rekening te houden met slechts drie stroomspanningsverhoudingen? Zijn de drie vermelde grootheden onafhankelijk?

Aanwijzing: Ga uit van de definiërende vergelijkingen van twee gekoppelde spoelen. De equivalenties van fig. 123b en c heten Norton-transformaties. Figuur 124_a laat zien hoe deze transformaties toegepast kunnen worden. In fig. 124c wordt het

eindresultaat aangegeven. Het aantal elementen is groter dan bij het eerste schema en de ideale transformatoren die in feite als rekenhulpmiddel zijn gebruikt zijn uit het eindschema verdwenen. De omvorming van de gegeven schakeling vindt haar toepassing op het ontwerpen van filterschakelingen voor de communicatietechniek. Met een geschikte keuze van de parameter n heeft de ontwerper meestal voldoende vrijheid om praktische waarden voor de elementen te krijgen.

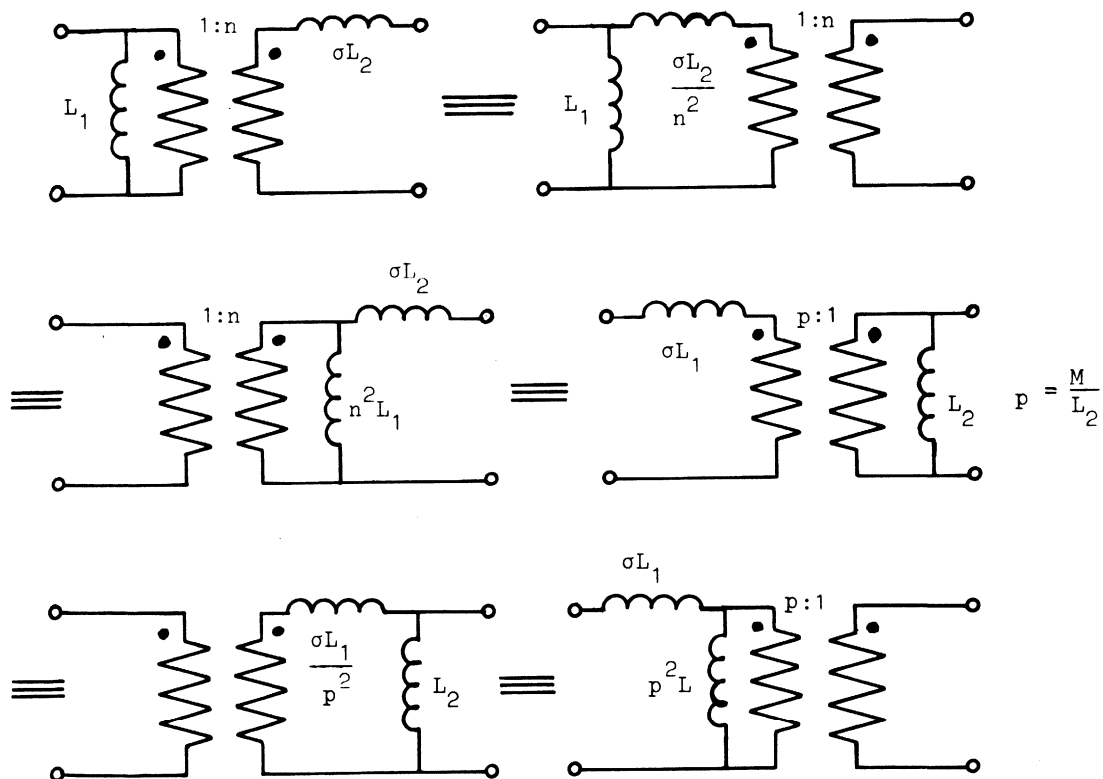
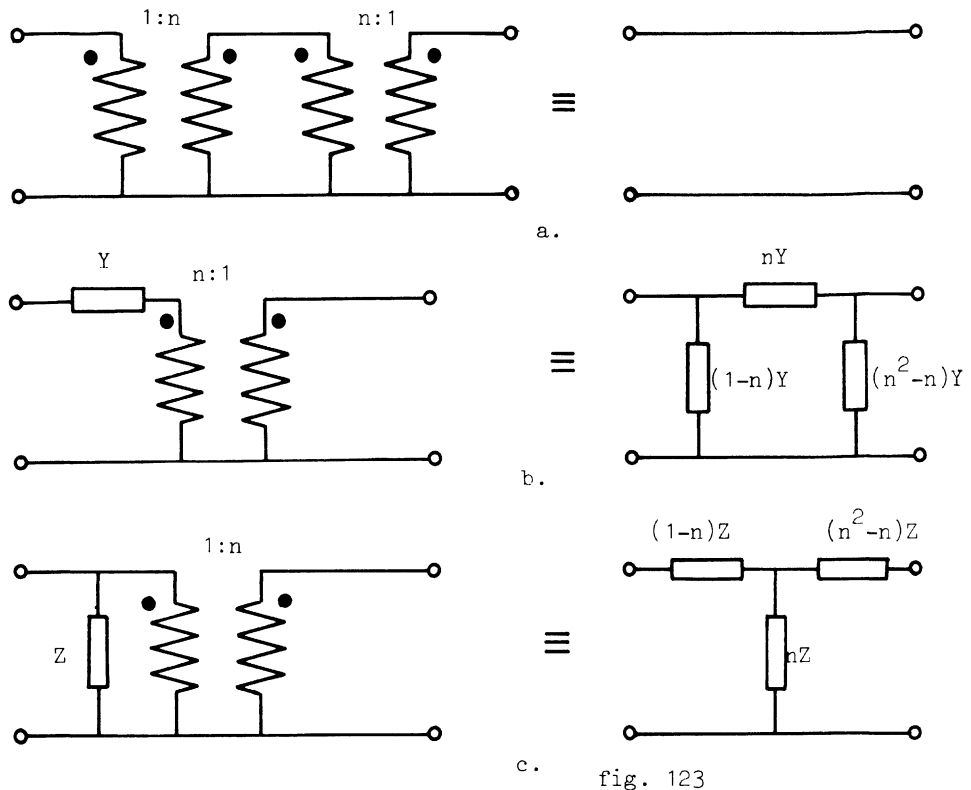


fig. 122



7.10. Aanpassing bij passieve netwerken

Een passief netwerk is een netwerk dat niet meer energie door de poorten naar buiten kan leveren dan reeds door de poorten is ontvangen. Voorbeelden van passieve netwerken zijn de éénpoortnetwerken, bestaande uit de enkele elementen weerstand, condensator, spoel of het tweepoortnetwerk de ideale transformator. De bronnen daarentegen zijn voorbeelden van actieve netwerken. Wij beperken onze beschouwingen tot een éénpoortnetwerk. Indien alle stromen en spanningen exponentiële functies van de tijd zijn, dan heeft het netwerk volgens Thévenin of Norton een equivalent, waarin de bronsterkten en immittanties functies van $j\omega$ zijn (fig. 125).

Als een weerstand R , respectievelijk geleiding G , aan de poort wordt verbonden is het aan de weerstand geleverde complexe vermogen

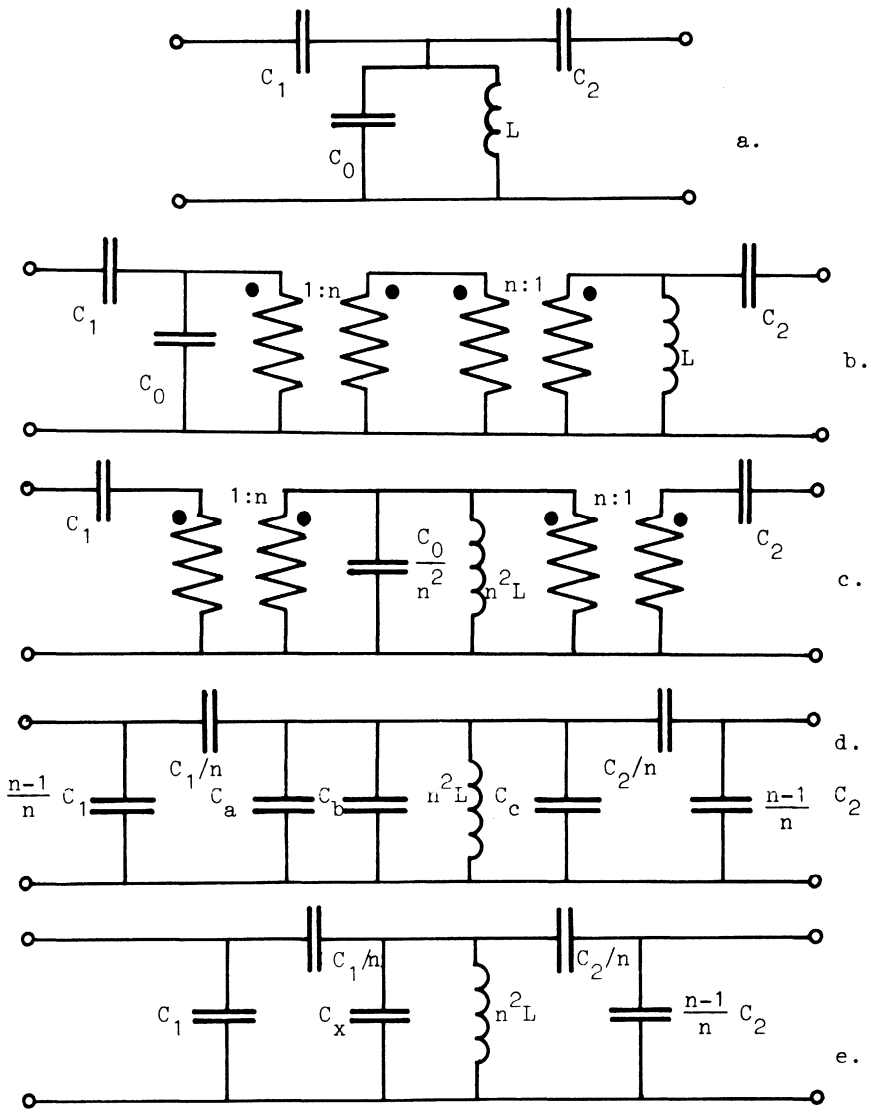


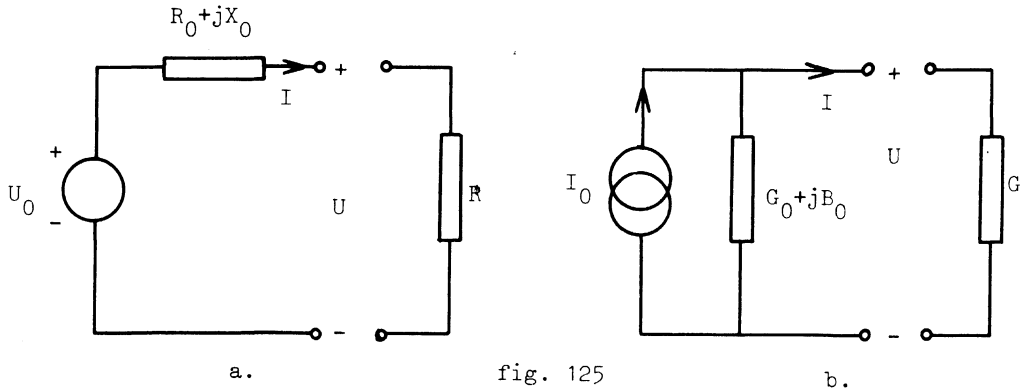
fig. 124

$$C_a = \frac{1-n}{n^2} C_1$$

$$C_c = \frac{1-n}{n^2} C_2$$

$$C_b = C_0/n^2$$

$$C_x = C_a + C_b + C_c$$



$$S = \frac{1}{2} UI^* = \frac{\frac{1}{2} |U_0|^2 R}{(R+R_0)^2 + X_0^2} \quad (\text{fig. } 125a) \quad \text{of} \quad \frac{1}{2} UI^* = \frac{\frac{1}{2} |I_0|^2 G}{(G+G_0)^2 + B_0^2} \quad (\text{fig. } 125b)$$

Het is duidelijk dat $\text{Re}(UI^*) \geq 0$. Indien het teken $>$ geldt, levert het netwerk voortdurend energie aan de weerstand. Het netwerk kan dus slechts passief zijn als het gelijkteken geldt, d.w.z. $U_0 = 0$, respectievelijk $I_0 = 0$.

In dat geval geldt: $U = -(R_0 + jX_0)I$, respectievelijk $I = -(G_0 + jB_0)U$

$$2P = \text{Re}(UI^*) = -\text{Re}((R_0 + jX_0)I I^*) = -R_0 |I|^2, \text{ respectievelijk}$$

$$-\text{Re}((G_0 + jB_0)U U^*) = -G_0 |U|^2.$$

Dus is P negatief indien R_0 of $G_0 > 0$ is. D.w.z., alleen als $R_0, G_0 < 0$ is, zou het netwerk voortdurend energie aan uitwendig verbonden netwerken kunnen leveren, wat in strijd is met de passiviteitsvoorwaarde.

Dus voor een immittantie geldt: $\frac{1}{2} \text{Re}(UI^*) = \frac{1}{2} \text{Re}Z |I|^2 = P$. Het volgt uit § 4.6. dat het reële deel van een immittantie opgebouwd uit weerstanden, condensatoren en spoelen niet negatief kan zijn. Als het netwerk ook ideale transformatoren bevat is hun bijdrage tot de Tellegen-som

$$\sum UI^*, \text{ identiek nul, zodat } \text{Re}Z \geq 0 \text{ geldig blijft voor deze klasse}$$

netwerken.

De conclusie is dan dat bij de sinusvormige stromen en spanningen het Thévenin- of Norton-equivalent van een passief één-poortnetwerk een impedantie $R_0(\omega) + jX_0(\omega)$ of een admittantie $G_0(\omega) + jB_0(\omega)$ is, waarin $R_0(\omega), G_0(\omega) > 0$.

Een probleem dat zich in de elektrotechniek vaak voordoet is het volgende: Een gegeven één-poortnetwerk dat energiebronnen bevat, moet aan een te kiezen passief netwerk verbonden worden zodat het door het passieve netwerk opgenomen vermogen maximaal is. Wij geven de oplossing voor één enkele frequentie. (In het algemeen is het een zeer moeilijk probleem een passief netwerk zodanig te bepalen dat het opgenomen vermogen binnen een gegeven frequentieband maximaal is.)

In overeenstemming met fig. 125, met R en G vervangen door respectievelijk $R + jX$ en $G + jB$, is het overgedragen complexe vermogen

$$\frac{1}{2} UI^* = \frac{1}{2} \frac{(R+jX) |U_0|^2}{(R+R_0)^2 + (X+X_0)^2} \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{1}{2} \frac{(G-jB) |I_0|^2}{(G+G_0)^2 + (B+B_0)^2}$$

$$\text{Dus } \text{Re}(UI^*) = \frac{R |U_0|^2}{(R+R_0)^2 + (X+X_0)^2} \quad \text{respectievelijk} \quad \frac{G |I_0|^2}{(G+G_0)^2 + (B+B_0)^2}$$

Aangezien $R, G \geq 0$, maar X, B willekeurig gekozen kunnen worden, is het reële vermogen maximaal wanneer

$$X = -X_0, \quad B = -B_0, \quad \frac{(R+R_0)^2}{R} \quad \text{en} \quad \frac{(G+G_0)^2}{G} \quad \text{minimaal zijn,}$$

$$\text{d.w.z. dat} \quad \frac{(R-R_0)^2}{R} + 4R_0, \quad \frac{(G-G_0)^2}{G} + 4G_0 \quad \text{minimaal moeten zijn,}$$

dus $R = R_0$, respectievelijk $G = G_0$

$$\text{en } \text{Re}(UI^*) = |U_0|^2/4R_0 \quad \text{respectievelijk} \quad |I_0|^2/4G_0.$$

Het maximaal beschikbare vermogen is dan $|U_0|^2/8R_0$, respectievelijk

$|I_0|^2/8G_0$. Onder deze omstandigheden wordt gesproken over de aanpassing van de passieve belasting aan de inwendige immittantie van het energie

leverende netwerk. De optimale belasting Z_1 is dan Z_0^* , resp. $Y_1 = Y_0^*$. Men spreekt dan van vermogensaanpassing.

Soms is de belasting gegeven terwijl men toch de maximale vermogensoverdracht wil verwezenlijken. In zo'n geval kan de ideale transformator zeer nuttig worden toegepast.

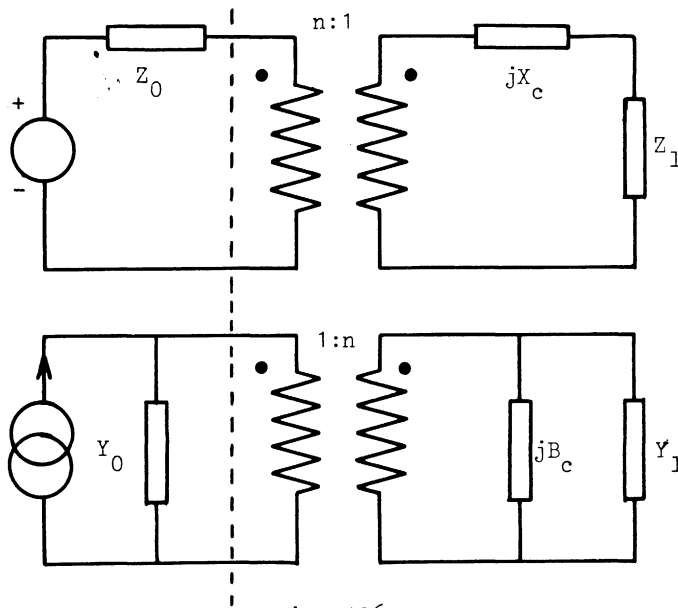


fig. 126

In fig. 126 zien wij de belasting gecombineerd met een compenserende reactantie (susceptantie), zodat het deelnetwerk rechts van de stippellijn vervangen mag worden door een impedantie

$$n^2(Z_1 + jX_c) \text{ respectievelijk admittantie } n^2(Y_1 + jB_c).$$

Indien deze gelijk is aan Z_0^* respectievelijk Y_0^* dan wordt de vermogensoverdracht naar het netwerk rechts van de stippellijn maximaal. Aangezien het opgenomen actieve vermogen voor een transformator en voor een reactantie (susceptantie) nul is, wordt het totale vermogen in de belasting gedissipeerd. De voorwaarden zijn dus

$$1/n^2 = R_1/R_0 = G_1/G_0; \quad -X_0 = n^2(X_1 + X_c); \quad -B_0 = n^2(B_1 + B_c).$$

Een reële transformator met te verwaarlozen dissipatie in de wikkelingen en de kern, mag vervangen worden door één van de schakelingen van fig. 122, waarbij de zelfinducties door algemene reactanties moeten worden vervangen. (Hierbij houdt men rekening met zowel de capacitieve als de inductieve effecten in de transformator.) Deze reactanties kunnen worden gecombineerd met de belastingsimmittantie op een overeenkomstige wijze als hierboven; hieruit kunnen dan de aanpassingsvoorwaarden worden afgeleid.

Voorbeeld:

Gevraagd: Ontwerp een twee-poortnetwerk waarmee het mogelijk is de twee onderstaande schakelingen aan elkaar te passen bij 1kHz, (zie fig. 127).

Eerste oplossing: de norton-admittantie van de linkerschakeling in

$$10^{-4} + j 6,3 \times 10^{-8} \text{ S.}$$

De admittantie van de belasting is:

$$\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2 L^2} \approx \frac{R}{\omega^2 L^2} - \frac{j}{\omega L} = 1,26 \times 10^{-5} - j 1,6 \times 10^{-3} \text{ S.}$$

Wij kunnen nu de transformatorverhouding bepalen als 1:n waarin

$$n = \frac{\omega L}{\sqrt{5 \times 10^4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2,8.$$

De compenserende susceptantie die aan de belasting moet worden bijgevoegd is zodanig dat de som van de argumenten van de admittantie aan weerszijden van de transformator nul moet zijn. Dit leidt tot $B_c = 1,6 \times 10^{-3} \text{ S}$, zodat de corresponderende capaciteit $0,25 \mu\text{F}$ bedraagt.

Tweede oplossing:

In plaats van een parallelsusceptantie als compenserend element te gebruiken kunnen wij aanpassing bereiken m.b.v. een seriereactantie. In dit geval is het gemakkelijker met impedanties te werken. De Thévenin-impedantie aan de primaire zijde is

$$\frac{G-j\omega C}{G^2+\omega^2 C^2} \approx \frac{1}{G} - \frac{j\omega C}{G^2} = 10^4 - j 2\pi \Omega .$$

Aan de secundaire zijde hebben wij $Z = 5 + j200\pi + jX_c \Omega$.

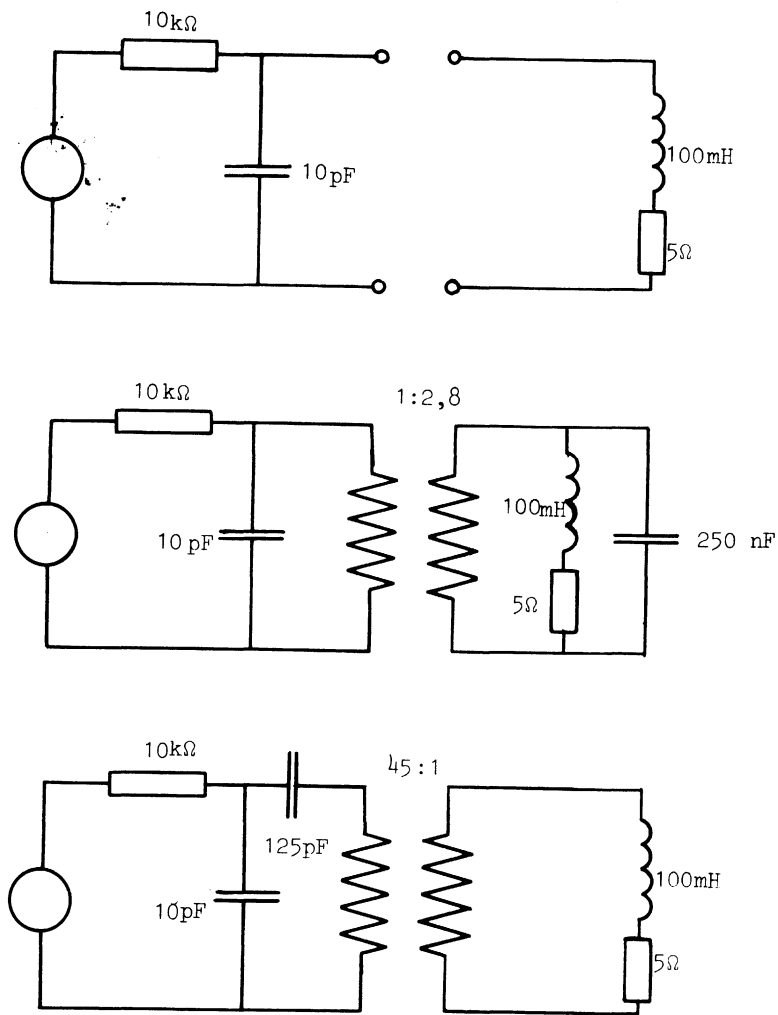


fig. 127

De transformatie-verhouding is dan $\sqrt{\frac{10^4}{5}} = 45$. De compenserende reactantie is zodanig dat de som van de argumenten van de impedanties nul moet zijn. Hieruit volgt X_c , zodat de bijbehorende capaciteit

$$\frac{10^{-5}}{4 \pi^2} \text{ F bedraagt. Tenslotte kan deze capaciteit naar de primaire zij-}$$

de worden getransformeerd (fig. 127c).

Andere oplossingen zijn ook mogelijk als wij meer ingewikkelde compenserende reactantie-schakelingen bedenken. De tweede oplossing die hier gegeven is zou praktisch moeilijker in fysische vorm te realiseren zijn vanwege de grote windingverhouding. In beide gevallen is de invloed van de 10 pF-condensator te verwaarlozen zodat het schema hierdoor vereenvoudigd kan worden.

8. ALGEMENE PERIODIEKE VERSCHIJNSELEN EN REEKSEN VAN FOURIER

8.1. Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken hebben wij ons steeds bezig gehouden met elektrische grootheden die hetzij constant, hetzij sinusvormig of exponentieel met de tijd variëren. In de natuurkunde in het algemeen en in de elektrotechniek in het bijzonder komen andere verschijnselen vaak voor die op een heel andere manier met de tijd veranderen, zoals in fig. 128 wordt weergegeven.

De hier afgebeelde functies zijn periodiek,

$$\text{d.w.z. } f(t) \equiv f(t+T), \quad (1)$$

waarbij T de periode is. Het is evident dat als $f(t) \equiv f(t+T)$, dan is ook $f(t) \equiv f(t+mT)$, waarin m een geheel getal is. Wij definiëren T als het kortste tijdsinterval, dat aan de identiteit (8.1) voldoet.

Wij hebben het begrip periodieke functie reeds ingevoerd bij de studie van sinusvormige verschijnselen; een sinusfunctie is dan gewoon een speciale periodieke functie.

Het eerste probleem dat wij bij het werken met periodieke functies tegenkomen is het vinden van een geschikte wiskundige vorm, waaronder wij het hele begrip periodieke functie kunnen vatten en hierdoor een effectieve rekenwijze opbouwen. Gezien de ervaring die wij met sinusfuncties reeds opgedaan hebben, lijkt het wel zinvol eerst na te gaan welke functies wij met sinusfuncties kunnen samenstellen.

Een functie zoals

$$a \sin \omega t + b \sin \left(\frac{m\omega t}{n} \right) \quad (2)$$

is volgens de definitie periodiek. De termen afzonderlijk hebben perioden

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ respectievelijk } T_2 = \frac{2\pi n}{m\omega}, \text{ maar de periode van de som is}$$

$$T = nT_1 = mT_2 = \frac{2n\pi}{\omega}.$$

Alleen na zo'n tijdsinterval herhalen beide termen zich, zodat T inderdaad het kortste tijdsinterval is dat aan (8.1) voldoet.

Wij kunnen dus stellen dat als de verhouding tussen de perioden van twee sinusfuncties rationeel is, dan is de som van de twee sinusfuncties

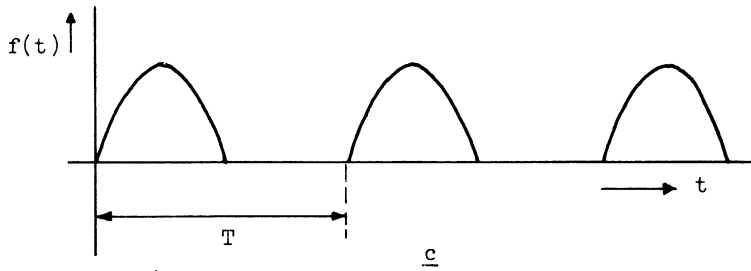
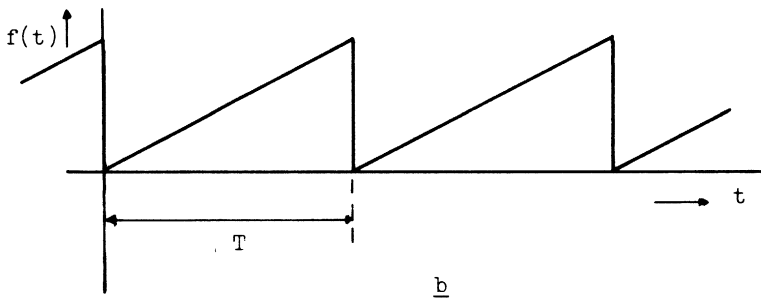
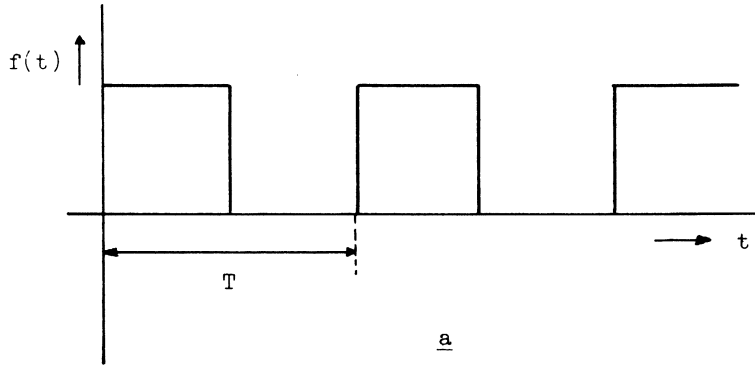


Fig. 128

een periodieke functie. Als de verhouding echter niet rationeel is, dan is de som-functie niet periodiek, maar is wat men noemt een bijna-periodieke functie. Om dit in te zien beschouwen wij een rij rationale benaderingen tot de niet-rationele verhouding tussen de perioden. Hoe beter de benadering tot het getal, hoe groter zijn de gehele getallen m en n . Het gevolg is dat de periode naar het oneindige nadert, als $\frac{m}{n}$ het niet-rationele getal benadert. In de limiet wordt de "periode" oneindig; er is echter dan geen sprake van een periodieke functie.

Uit deze overwegingen komen wij dan tot de volgende functionele vorm als (voorlopig) de meest algemene vorm van een periodieke functie:

$$g(t) = h_0 + h_1 \sin(\omega t + \phi_1) + h_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots + h_N \sin(N\omega t + \phi_N) =$$

$$= \sum_0^N h_n \sin(n\omega t + \phi_n), \text{ of, aangezien}$$

$$\sin(n\omega t + \phi_n) = \sin n\omega t \cos \phi_n + \cos n\omega t \sin \phi_n,$$

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_N \cos N\omega t + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_N \sin N\omega t, \quad (3)$$

waarin alle coëfficiënten reëel zijn.

Zo'n functie is duidelijk periodiek met periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Bovendien is het evident dat elke eindige som van sinusfuncties met perioden die in rationale verhouding staan, in deze vorm kan worden geschreven door ω geschikt te kiezen. Zo'n reeks heet een (eindige) reeks van Fourier. Door zijn onderzoeken aan warmtegeleiding is Fourier (1768-1830) tot de studie van dergelijke reeksen gekomen. *)

Het is niet nodig dat alle termen aanwezig zijn; sommige coëfficiënten a_n , b_n kunnen nul zijn.

Vraag: Hoe volgt de vorm (8.2) uit (8.3)?

De verschillende termen in zo'n reeks worden harmonischen genoemd. De n^{de} harmonische is $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ met $n = 0, \dots, N$. De eerste harmonische wordt ook de grondterm, of in een acoustische context de grondtoon genoemd. Dan heet ω de grond(hoek) frequentie, ook indien $a_1 = b_1 = 0$.

De nulde harmonische kan worden genoemd de gelijkstroom-term.

*) Veel eerder in 1753 had Daniel Bernoulli met dergelijke reeksen gewerkt in verband met trillende snaren.

Zo'n functionele voorstelling van een fysisch verschijnsel is rekenkundig zeer aantrekkelijk, daar het verschijnsel kan worden opgevat als de superpositie van een aantal sinusvormige verschijnselen, die ieder apart m.b.v. de complexe rekenwijze berekend kunnen worden.

Voorlopig laten wij in het midden of er aan N beperkingen opgelegd moeten worden. Om echter een indruk te vormen van de mogelijkheden van zo'n reeks bekijken wij het voorbeeld van fig. 129.

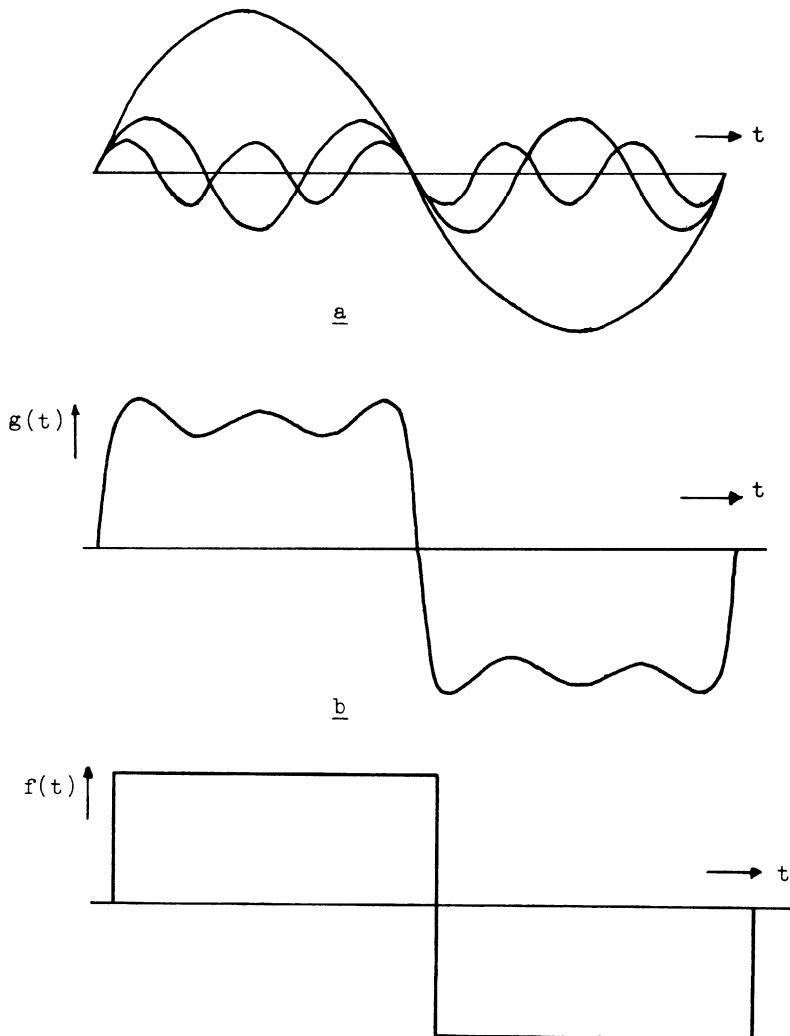


fig.129

In fig. 129a zijn getekend de functies $\sin \omega t$, $\frac{1}{3} \sin 3\omega t$ en $\frac{1}{5} \sin 5\omega t$. In fig. 129b is de som van deze drie functies getekend waardoor de functie $f(t)$ van fig. 129c vrij goed is benaderd. De benadering kan nog verbeterd worden door verdere oneven harmonischen aan de som toe te voegen:

$\frac{1}{7} \sin 7\omega t$, $\frac{1}{9} \sin 9\omega t$. Wij vinden dat als meer termen aan de reeks worden toegevoegd, de rimpel steeds kleiner wordt en de overgang van positieve naar negatieve waarden steeds steiler. Het blijft echter een benadering; de functie wordt nooit exact door zo'n reeks weergegeven. Aan de hand van dit voorbeeld blijkt dat het zeker de moeite waard is de wiskundige eigenschappen van fourierreeksen nader te onderzoeken.

8.2. Vermogensrelaties

Wij zullen de eerste eigenschappen in samenhang met een elektrotechnische interpretatie onderzoeken. Stel dat een stroom met sterkte $i(t)$ in een weerstand van 1Ω vloeit, waarbij

$$i(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + \dots + a_N \cos N\omega t + b_1 \sin \omega t + \dots + b_N \sin N\omega t. \quad (4)$$

Daar $\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t})$ en $\sin n\omega t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t})$,

kunnen wij $i(t)$ schrijven in de vorm

$$i(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{jn\omega t}, \quad (5)$$

waarin de c_n in het algemeen complex zijn.

Maar $i(t)$ is een reële functie, zodat $i(t) \equiv (i(t))^*$.

$$\text{D.w.z. } \sum_{-N}^N c_n e^{jn\omega t} \equiv \sum_{-N}^N c_n^* e^{-jn\omega t}.$$

De n^{de} harmonische in deze reeks is

$$c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t} = c_n^* e^{-jn\omega t} + c_{-n}^* e^{jn\omega t}.$$

Vergelijkten wij deze uitdrukkingen met (8.4) dan volgt

$$a_n = c_n + c_{-n} = c_n^* + c_{-n}^*, \quad n \neq 0,$$

$$a_0 = c_0$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j(c_{-n}^* - c_n^*), \quad n \neq 0.$$

$$\text{zodat } c_n = c_{-n}^* \quad n \neq 0, \quad (6)$$

$$\text{en } a_n = 2\text{Re}(c_n), \quad b_n = -2\text{Im}(c_n), \quad n \neq 0. \quad (7)$$

$$\text{en } c_n = \frac{1}{2}(a_n + jb_n). \quad (8)$$

Wij zullen nu het vermogen berekenen, dat gemiddeld over een periode in de weerstand wordt gedissipeerd.

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (i(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{-N}^N c_r e^{jr\omega t} \sum_{-N}^N c_s e^{js\omega t} \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{-N}^N \sum_{-N}^N c_r c_s e^{j(r+s)\omega t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N \int_0^T c_r c_s e^{j(r+s)\omega t} dt \quad (9) \end{aligned}$$

In deze dubbele sommatie komen termen voor die ontstaan door een willekeurige term uit de reeks (8.5) te vermenigvuldigen met een andere (of dezelfde) willekeurige term uit dezelfde reeks. Op deze wijze ontstaat de typerende term $c_r c_s e^{jr\omega t} \cdot e^{js\omega t}$, waarin r, s willekeurige gehele getallen tussen (of inclusief) $-N$ en $+N$ zijn. De dubbele sommatie duidt aan dat alle mogelijke termen van deze vorm opgeteld moeten worden.

$$\text{Nu is } \int_0^T e^{j(r+s)\omega t} dt = \frac{1}{(r+s)\omega} e^{j(r+s)\omega t} \Big|_0^{2\pi/\omega} = 0 \quad (r+s \neq 0)$$

$$= T \quad (r+s = 0).$$

Het gevolg is dat alle termen in de reeks nul zijn behalve in het geval dat $r = -s$. Het volgt uit (8.9) en 8.6) dat

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &= \sum_{-N}^N c_r c_{-r} = \sum_{-N}^N |c_r|^2 \\ &= c_0^2 + 2 \sum_1^N |c_r|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^N (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Wij kunnen dan stellen dat de gemiddelde waarde over een periode van het kwadraat van een eindige fourierreeks gelijk is aan de som van de kwadraten van de moduli van de complexe coëfficiënten c_n , of is gelijk aan de som van de kwadraten van de effektieve waarden van de harmonischen. (In de n^{de} harmonische, $a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t$, is de amplitude gelijk aan $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ en is de effectieve waarde gelijk aan $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.)

Fysisch betekent dit resultaat dat het gemiddelde in de weerstand gedissipeerde vermogen gelijk is aan de som van de gemiddelde vermogens van iedere harmonische stroom, berekend alsof de andere harmonischen niet aanwezig waren. In het algemeen, zoals wij eerder gezien hebben, geldt het superpositiebeginsel voor het vermogen niet, daar het vermogen geen lineaire functie van de variabelen stroom en spanning is. Echter in dit bijzondere geval van harmonische stromen, geldt het superpositiebeginsel voor het gemiddelde vermogen.

Opgave: Gegeven de takstroom en de takspanning

$$i(t) = \frac{1}{2} \sum_{-N}^N I_n e^{jn\omega t} \quad \text{respectievelijk} \quad u(t) = \frac{1}{2} \sum_{-N}^N U_n e^{jn\omega t}.$$

Leid af een formule analoog aan (8.10), die het gemiddelde van het in de tak gedissipeerde vermogen weergeeft en vergelijk het resultaat met de formules van §4.6.

Wanneer alle stromen en spanningen in een netwerk van de vorm

$\sum_{-N}^N I_n e^{jn\omega t}$, respectievelijk $\sum_{-N}^N U_n e^{jn\omega t}$ zijn, kunnen wij afleiden dat

de complexe stromen I_n en spanningen U_n ($n=-N, \dots, N$) aan de wetten van Kirchhoff voldoen. Duiden wij de grootheden aan die bij tak b behoren met de index b , dan is de vergelijking

$$\sum_b \sum_{n=-N}^N I_{b,n} e^{jn\omega t} \equiv 0 \quad \text{- waarin } b \text{ wordt genomen over alle takken die}$$

in een bepaald knooppunt samenkomen - de uitdrukking van de stroomwet van Kirchhoff voor dat ene knooppunt.

Dus is

$$\sum_{n=-N}^N (\sum_b I_{b,n}) e^{jn\omega t} \equiv 0.$$

Wanneer een eindige fourierreeks identiek nul is, zijn alle coëfficiënten van de reeks nul. Dit komt doordat wij de reeks als een product van twee factoren mogen beschouwen, nl. $z^{-N} = e^{-jN\omega t}$ en een polynoom in $z = e^{j\omega t}$. Dit produkt is nul voor een oneindig aantal (complexe) waarden van z , overeenkomend met de omtrek van de eenheidscirkel; de enige mogelijkheid is dan dat de coëfficiënten van de polynoom alle nul zijn.

Hieruit volgt dat

$$\sum_b I_{b,n} = 0 \quad (n = -N, \dots, N), \quad (11)$$

zijnde de stroomwet voor de complexe stroom die bij de n^{de} harmonische behoort. Op dezelfde wijze vinden wij dat aan de spanningswet wordt beantwoord door de complexe spanningen van de n^{de} harmonische:

$$\sum_m U_{m,n} = 0 \quad (n = -N, \dots, N), \quad (12)$$

waarin de index m de takken aanduidt die gezamenlijk een maas vormen. Het gevolg is dat alle theorema's en rekenmethoden, afhankelijk van de wetten van Kirchhoff, ook geldig zijn voor iedere harmonische apart, gerekend alsof de andere harmonischen niet aanwezig waren. In het bijzonder geldt het theorema van Tellegen voor de complexe stroom en spanning van de n^{de} harmonische. Hieruit volgt de behoudswet voor het complexe vermogen:

bij iedere harmonische is het door de bronnen afgegeven complexe vermogen gelijk aan het door de andere takken opgenomen complexe vermogen. Dit resultaat is een vorm van het principe van harmonisch evenwicht, dat toepassing in verscheidene takken van de fysica vindt.

8.3. Wisselgrootheden en effectieve waarden

Wij definiëren een wisselgrootheid als een periodieke grootheid waarvan de gemiddelde waarde over een periode nul is. Aangezien de gemiddelde waarde van een sinusfunctie nul is, is het duidelijk dat een fourierreeks zonder nulde harmonische een wisselgrootheid voorstelt. Indien een wisselstroom of spanning van de vorm

$$i(t) = \frac{1}{2} \sum_{-N}^N I_n e^{jn\omega t} \quad (n \neq 0) = \sum_1^N |I_n| \cos(n\omega t + \phi_n),$$

in een weerstand van 1Ω vloeit, wordt een gemiddeld vermogen gedissipeerd gelijk aan $\frac{1}{2} \sum_1^N |I_n|^2$ (wegens (8.10)). Wij definiëren de effectieve waarde van de wisselstroom als die gelijkstroomsterkte welke aanleiding geeft tot hetzelfde gedissipeerd vermogen in een weerstand van 1Ω . Dus $|I_{\text{eff}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_1^N |I_n|^2$.

Hebben wij te maken met een periodieke niet-wisselgrootheid dan moet de term I_0^2 er worden bijgevoegd, zodat:

$$|I_{\text{eff}}|^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum |I_n|^2 \text{ in overeenstemming met het bovenstaande.}$$

Als zodanig is dit een eenvoudige uitbreiding van het begrip effectieve waarde voor sinusvormige stromen. Het blijkt niet mogelijk de complexe effectieve waarde zinvol te kunnen definiëren; alleen de reële grootheid $|I_{\text{eff}}|$ heeft betekenis.

In de energietechniek wordt ook soms gewerkt met het schijnbaar vermogen $|U_{\text{eff}}| |I_{\text{eff}}|$. Wij zullen nu aantonen dat het schijnbaar vermogen nooit minder dan het reële vermogen is. Wij moeten nu bewijzen dat

$$\sum_1^N \frac{1}{2} |U_n I_n^*| \leq \sqrt{\frac{1}{2} \sum_1^N |U_n|^2} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_1^N |I_n|^2}.$$

Wij beschouwen de uitdrukking

$$\sum_{n=1}^N \{x|U_n| + |I_n|\}^2 \geq 0, \quad \text{voor alle reële } x,$$

$$\begin{aligned} &= \sum_1^N \{x^2|U_n|^2 + 2x|U_n||I_n| + |I_n|^2\} \\ &= x^2 \sum_1^N |U_n|^2 + 2x \sum_1^N |U_n||I_n| + \sum_1^N |I_n|^2. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking is een kwadratische polynoom in x . De voorwaarde dat hij niet-negatief moet zijn is dat er geen reële nulpunten zijn, d.w.z.

$$\left\{ \sum_1^N |U_n||I_n| \right\}^2 \leq \sum_1^N |U_n|^2 \sum_1^N |I_n|^2$$

Hieruit volgt dan

$$\begin{aligned} P &= \sum \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_n I_n^*) \leq \sum \frac{1}{2} |U_n I_n^*| = \sum \frac{1}{2} |U_n| |I_n| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_1^N |U_n|^2} \sqrt{\sum_1^N |I_n|^2} = |U_{eff}| |I_{eff}| = |S|. \end{aligned}$$

De basis-ongelijkheid die hier is afgeleid staat bekend als de ongelijkheid van Cauchy of de ongelijkheid van Schwarz.

8.4. De fourierreeks van een periodieke functie

Wij zullen nu ingaan op het zuiver wiskundige vraagstuk van de benadering van een periodieke functie door een fourierreeks.

Onze eerste taak is een geschikt criterium voor de kwaliteit van de benadering te vinden.

8.4.1. Het benaderingscriterium

Als $f(t)$ een gegeven periodieke functie en $g(t)$ een fourierreeks van dezelfde periode is, die de functie benadert, dan is een mogelijk criterium:

$|f(t) - g(t)| < \epsilon$, voor alle t in het interval $(0, T)$, waarin ϵ een van tevoren bepaald klein getal is.

Wegens de periodiciteit moet deze gelijkheid voor alle t gelden. Hoe klein ϵ is, hoe beter is de benadering. Het blijkt echter dat bij de toepassing van dit criterium op periodieke functies grote moeilijkheden optreden.

Wel wordt dit criterium vaak toegepast op niet-periodieke functies, maar met t beperkt tot een eindig interval. De benaderde functie is dan echter geen fourierreeks meer maar nu meestal een functie gebaseerd op de z.g. Tsjebysjef-polynomen. Buiten het interval is de benadering echter slecht, zodat dergelijke functies niet geschikt voor de benadering van periodieke functies zijn.

Een andere mogelijkheid is de fout - d.w.z. het verschil tussen de gegeven functie en de benaderende functie - op een of andere manier te middelen over een periode. Dit leidt o.a. tot de volgende criteria:

$$\frac{1}{T} \left| \int_0^T \{f(t) - g(t)\} dt \right| < \epsilon \quad (13)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - g(t)| dt < \epsilon \quad (14)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{f(t) - g(t)\}^2 dt < \epsilon. \quad (15)$$

Nu is (8.13) geen geschikt criterium, daar een grote positieve fout over een deel van het interval kan worden opgeheven door een even grote negatieve fout over een ander deel van het interval, waardoor er wel aan (8.13) maar niet aan het intuïtieve begrip van een goede benadering wordt voldaan. Het criterium (8.14) is niet aan dit bezwaar onderhevig, daar steeds de modulus van de fout over het hele interval wordt opgeteld. Het heeft echter het nadeel dat de nodige wiskundige bewerkingen bij de toepassing van een dergelijk criterium niet eenvoudig zijn.

Daarentegen is (8.15) vrij van deze beide bezwaren. Bovendien vanuit een fysisch standpunt bezien komt (8.15) bijzonder geschikt voor. In de communicatie- en informatietechniek speelt de parameter signaal/ruis-verhouding een belangrijke rol. Deze parameter is een verhouding van vermogens waarbij uitdrukkingen van de vorm (8.15) op een natuurlijke wijze naar voren komen.

De fysische basis voor dergelijke beschouwingen berust in de laatste instantie op het gedrag van de atomen waaruit alle materie is samengesteld.

8.4.2. De fouriercoëfficiënten

Wij zullen nu de coëfficiënten c_n van de fourierreeks berekenen die volgens het criterium (8.15) een willekeurige periodieke functie optimaal benadert. Om specifiek te zijn, zullen wij het volgende probleem oplossen:

Gegeven $f(t)$, periodiek met periode T en $g(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{jn\omega t}$ met dezelfde periode.

Bereken c_n zodanig dat

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{f(t) - g(t)\}^2 dt$$

minimaal is bij vaste N .

Om tot zinvolle resultaten te komen is het natuurlijk nodig dat de integraal en alle integralen die in de volgende bewerkingen voorkomen, bestaan. Dit is wel het geval voor alle functies $f(t)$ welke met fysische processen overeenkomen. Wij komen later op deze kwestie terug.

$$\text{Stel } \frac{1}{T} \int_0^T \{f(t) - g(t)\}^2 dt = \eta$$

$$\text{Dan is } \eta = \frac{1}{T} \int_0^T \{ \{f(t)\}^2 - 2f(t)g(t) + \{g(t)\}^2 \} dt.$$

Volgens (8.10) is de laatste term in deze uitdrukking,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \{g(t)\}^2 dt, \text{ gelijk aan } \sum_{-N}^N |c_n|^2 = \sum_{-N}^N c_n c_{-n}.$$

$$\text{Bovendien is } 2f(t)g(t) = f(t) \left\{ \sum_{-N}^N c_n e^{jn\omega t} + \sum_{-N}^N c_{-n} e^{-jn\omega t} \right\},$$

waarbij de laatste sommatieterm ontstaat uit de eerste door de volgorde van het doorlopen door de waarden van n om te keren. Wij kunnen dan schrijven:

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \{f(t)\}^2 - f(t) \sum_{-N}^N (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) \right\} dt + \sum_{-N}^N c_n c_{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{-N}^N \left\{ \left(c_n - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right) \left(c_{-n} - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega t} dt \right) \right\} \\
&+ \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt - \frac{1}{T^2} \sum_{-N}^N \left(\int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right) \left(\int_0^T f(t) e^{jn\omega t} dt \right) \\
&= \sum_{-N}^N \left| c_n - \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right|^2 + \\
&+ \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt - \sum_{-N}^N \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right|^2. \tag{16}
\end{aligned}$$

Bij deze laatste stap hebben wij gebruik gemaakt van de relatie $c_n^* = c_{-n}$ en het feit dat uit een complex getal het toegevoegde complex getal volgt door j overal te vervangen door $-j$. Bij vaste N is de uitdrukking slechts dan minimaal wanneer

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n = -N, \dots, N). \tag{17}$$

Vraag: Waarom is dit het geval?

Met deze keuze van c_n volgt uit (8.16):

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T \{f(t) - g(t)\}^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt - \sum_{-N}^N |c_n|^2. \tag{18}$$

$$\text{Hieruit blijkt dat } \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt \geq \sum_{-N}^N |c_n|^2, \tag{19}$$

en dat bij toenemende N , η steeds kleiner wordt.

Vraag: Waarom is dit het geval?

Wanneer aan (8.16) wordt voldaan, noemen wij $g(t)$ de (eindige) fourierreeks van $f(t)$. Voortaan zullen wij het fourierreeks uitsluitend in deze betekenis gebruiken, nl. de reeks die t.g.v. de relatie (8.17) bij een

gegeven functie behoort. *) Wij hebben echter nog niet bewezen dat η kleiner dan een willekeurig positief klein getal ϵ kan worden gemaakt. Wij hebben slechts bewezen dat met de keuze (8.17) van de coëfficiënten c_n en een vaste N de kleinst mogelijke waarde van η wordt verkregen, zonder te bepalen hoe klein deze waarde kan zijn. Wij zullen aan het einde van dit hoofdstuk op deze kwestie nader ingaan; voorlopig nemen wij aan dat in alle gevallen die voor de elektrotechniek van belang zijn, η willekeurig klein kan worden gemaakt door N voldoende groot te kiezen.

De relatie (8.18) staat bekend als de ongelijkheid van Bessel. Een fysische interpretatie is het volgende: is $f(t)$ de sterkte van een periodiek met de tijd veranderende stroom die in een weerstand van 1Ω vloeit, dan is het gemiddelde in de weerstand gedissipeerde vermogen niet minder dan het gemiddelde vermogen dat in een weerstand van 1Ω wordt gedissipeerd door een stroom, gevormd door de superpositie van harmonische stromen, waarvoor de amplituden gelijk zijn aan de moduli van de fouriercoëfficiënten van $f(t)$.

Het hier gebruikte criterium staat bekend als het criterium of de methode van de kleinste kwadraten, en als zodanig wordt toegepast in verschillende vormen op allerlei problemen uit de techniek en de toegepaste wiskunde. (**)

De relatie (8.17) is niet altijd de meest geschikte formule om fouriercoëfficiënten te berekenen. Uit (8.7) en (8.17) hebben wij

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \operatorname{Re} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n = 1, \dots, N) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \end{aligned} \quad (20)$$

*) In de wiskundige literatuur spreekt men van goniometrische reeksen en fourierreeksen. Een goniometrische reeks is een reeks van de vorm (8.3) zonder de noodzaak voor het bestaan van een zodanige functie $f(t)$ dat (8.17) geldt. Dergelijke reeksen die zo algemeen zijn gedefinieerd hebben tot nog toe geen toepassing in de elektrotechniek gevonden.

**) De methode is afkomstig van Gauss en werd ingevoerd in verband met de berekening van de banen van de hemellichamen.

$$\begin{aligned}
 & \text{(Let wel: } c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \text{).} \\
 b_n &= \frac{-2}{T} \operatorname{Im} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n = 1, \dots, N) \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Opgave: Leid corresponderende formules af voor de functie $f(\psi)$, waarin $\psi = \omega t$, zodanig dat t niet in het eindresultaat voorkomt.

8.4.3. Integraal over een periode van een periodieke functie.

Bij alle berekeningen die in de theorie van fourierreeksen voorkomen is het nuttig er aan te denken dat de integraal van een periodieke functie over één periode onafhankelijk is van de keuze van het begin- en eindpunt van het interval waarover er geïntegreerd wordt. D.w.z. als $F(t)$ een integreerbare periodieke functie met periode T is, dan is

$$\int_0^T F(t) dt = \int_{\xi}^{T+\xi} F(t) dt, \tag{22}$$

waarin ξ een willekeurig reëel getal is. Om dit te bewijzen beschouwen wij:

$$\int_0^T F(t) dt = \int_0^{\xi} F(t) dt + \int_{\xi}^{T+\xi} F(t) dt + \int_{T+\xi}^T F(t) dt \tag{23}$$

Maar $\int_{T+\xi}^T F(t) dt = \int_{\xi}^0 F(\tau+T) d\tau$, met de substitutie $t = \tau+T$; zodat

$$\int_{\xi}^0 F(\tau+T) d\tau = \int_{\xi}^0 F(t+T) dt = - \int_0^{\xi} F(t+T) dt = - \int_0^{\xi} F(t) dt.$$

Derhalve is de som van de eerste en derde termen in (8.23) gelijk nul, zodat (8.22) dan volgt. Het resultaat kan worden toegepast op alle integralen die wij in dit hoofdstuk hebben ingevoerd.

8.5. Symmetrie-relaties

Bij de berekening van de fourierreeks van een gegeven periodieke functie kan men vaak veel rekenwerk besparen door alle symmetrie-eigenschappen van de functie uit te buiten.

8.5.1. Evenfuncties (spiegelbeeld-symmetrie).

De eenvoudigste vorm van symmetrie is die waarbij de functie symmetrisch is t.o.v. de as $t=0$. Dan is $f(t) = f(-t)$. (Zie fig.130). Zo'n functie heet een evenfunctie. Voor zo'n functie geldt volgens (8.21) en (8.22):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f(-t) \sin(-n\omega t) d(-t) \right\} = 0. \end{aligned}$$

D.w.z., de fourierreeks van een evenfunctie bevat geen sinustermen, of m.a.v. bestaat uitsluitend uit cosinustermen en eventueel een constante term. Dit resultaat was te verwachten, daar een som van cosinustermen en een constante een evenfunctie is. Het zou heel vreemd zijn als wij een evenfunctie goed konden approximeren door een functie die niet even is.

Wij kunnen echter nog meer informatie uit de symmetrievoorwaarde halen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt - \int_0^{\frac{T}{2}} f(-t) \cos(-n\omega t) d(-t) \right\} \\ a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad (n \geq 1) \\ a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \end{aligned} \tag{24}$$

D.w.z., om de fouriercoëfficiënten van een evenfunctie te bepalen is het voldoende de integrand slechts over een halve periode te integreren, mits de oorsprong een eindpunt van het integratie interval is.

Opgave: Geef de corresponderende uitdrukking voor a_0 aan. Bepaal de fourierreeks van de functie afgebeeld in fig.131.

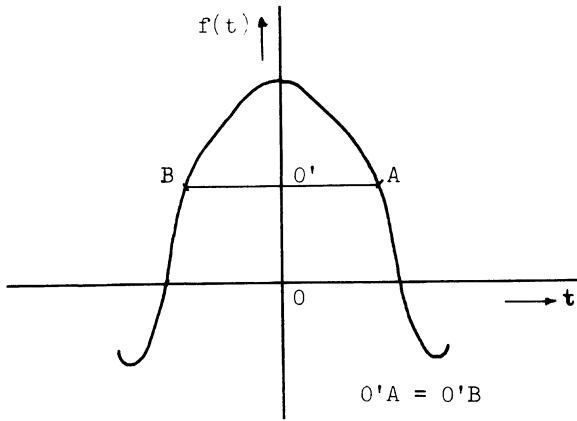


Fig.130

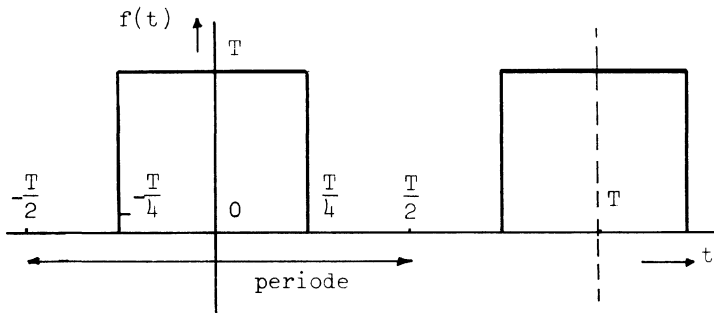


Fig.131

8.5.2. Onevenfuncties (radiaalsymmetrie)

Een onevenfunctie wordt gedefinieerd door $f(t) = -f(-t)$.

Zo'n functie is radiaalsymmetrisch; d.w.z. een rechte door de oorsprong snijdt de kromme van de functie in punten die op gelijke afstand van de oorsprong en in complementaire kwadranten liggen (1 en 3 of 2 en 4);

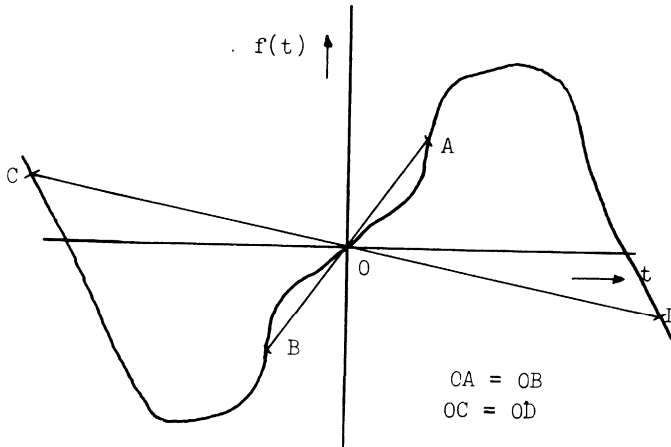


Fig.132.

Op precies dezelfde wijze als in § 8.5.1., maar nu met een tekenverandering in bepaalde termen, vinden wij dat

$$a_n = 0, (n = 1, \dots, N), \quad a_0 = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (25)$$

Opgaven: Bewijs (8.25).

Bepaal de fourierreeks van de functie afgebeeld in fig.133.

Als de kromme van fig.131 een halve periode naar rechts verschoven wordt en daarna een afstand $K/2$ naar beneden wordt verschoven dan verkrijgt men de kromme van fig.133. Aannemende dat de fourierreksen de twee functies naar believen goed benaderen, wat is dan het verband tussen de twee fourierreksen? Controleer dat de twee gevonden fourierreksen dit verband vertonen.

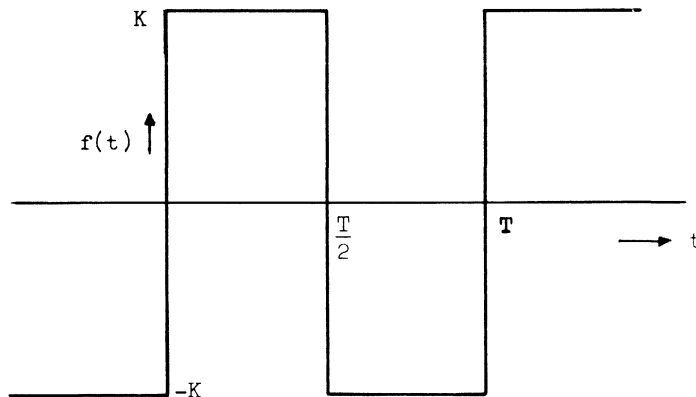


Fig.133.

8.5.3. Verschuivingssymmetrie

Een andere vorm van symmetrie wordt geïllustreerd door fig.134. Als de kromme van de functie door 180° om de t -as wordt gedraaid en dan een halve periode naar rechts wordt opgeschoven dan wordt de kromme van de oorspronkelijke functie weer verkregen.

Wij kunnen schrijven:

$$-f(t) \equiv f(t-T/2) \quad (26)$$

Een functie die hieraan voldoet noemen wij verschuivingsymmetrisch.
Voor de fouriercoëfficiënten c_n hebben wij

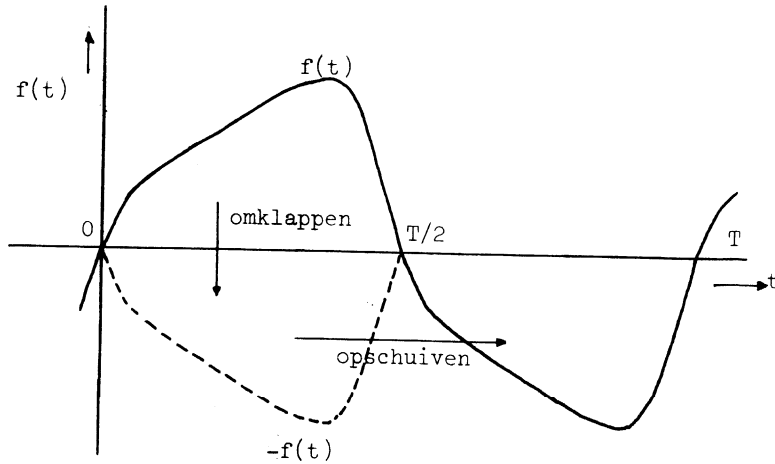


Fig. 134

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt + \int_{T/2}^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt + \int_0^{T/2} \{-f(\tau)\} e^{-jn\omega(\tau+T/2)} d\tau \right\}, \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van de substitutie $t = \tau + T/2$, (8.26) en de periodiciteit.

Dus is

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} (1 - e^{-jn\omega T/2}) dt \\ &= \frac{1}{T} (1 - e^{-jn\pi}) \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \end{aligned}$$

= 0 indien n even is.

Derhalve bestaat de fourierreeks slechts uit oneven harmonischen.

Opgave: Bereken opnieuw de fouriercoëfficiënten van de functie van fig. 131 op de meest eenvoudig mogelijke manier, gebruik makende van alle symmetrie eigenschappen en eventueel transformaties van de functie door verschuivingen langs de assen.

8.6. Voorbeelden

8.6.1. De functie van fig.135 is een z.g. driehoekfunctie die zowel symmetrisch als verschuivingsymmetrisch is. De fourierreeks bestaat

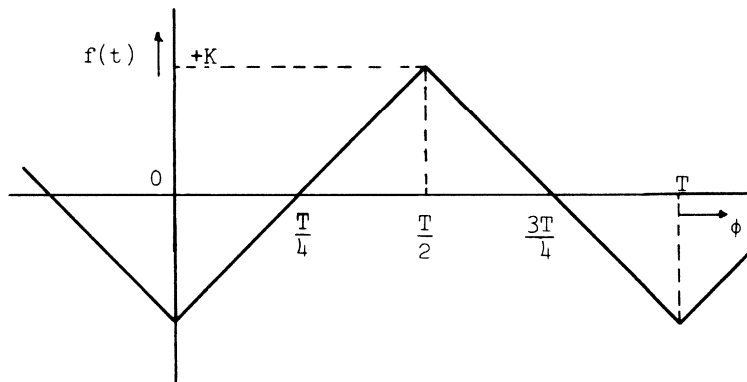


Fig.135.

derhalve uit cosinustermen van oneven harmonischen. In de eerste halve periode is $f(t)$ een lineaire functie met helling gelijk aan $4K/T$ en met een nulpunt in $t = T/4$.

Dus is

$$f(t) = \frac{4K}{T} \cdot (t - T/4).$$

De fouriercoëfficiënten zijn dan (volgens(8.24)):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left\{ \frac{4K}{T} (t - T/4) \cos(n\omega t) \right\} dt \quad (n \text{ oneven}) \\ &= \frac{16K}{T^2} \left(\frac{t-T/4}{n\omega} \sin(n\omega t) + \frac{1}{n^2 \omega^2} \cos(n\omega t) \right) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{16K}{T^2} \left(-\frac{1}{2n\pi} \sin(n\pi) + \frac{\cos(n\pi)-1}{4n^2 \pi^2 / T^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-8K}{n^2 \pi^2} \quad (n \text{ oneven})$$

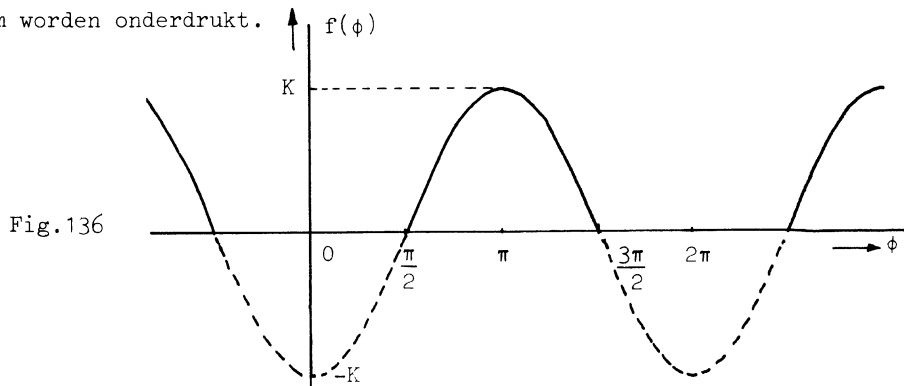
Opgaven: Welke functie volgt door $f(t)$ de differentiëren? Bewijs dat de fouriercoëfficiënten van $\frac{d}{dt} f(t)$ volgen uit de fourierreeks van $f(t)$ door term voor term te differentiëren. (Aanwijzing: ga uit van de definitie integraal $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{df(t)}{dt} e^{-jn\omega t} dt$ en gebruik partiële integratie). Leid hieruit een eenvoudigere rekenwijze af voor de bepaling van de fourier coëfficiënten van de functie van fig.135.

8.6.2. Een tweede voorbeeld is dat van fig.128 b, de z.g. zaagtandfunctie.

Als men deze kromme een afstand $\frac{1}{2}K$ naar beneden schuift, dan verkrijgt men een oneven functie waarvan de fourierreeks uitsluitend uit sinustermen bestaat. De fourierreeks van de gegeven functie $f(t) = g(t) + 2K$, waarin $g(t)$ de verschoven functie is, bestaat dan ook uit dezelfde sinus-termen te zamen met de constante $\frac{1}{2}K$.

Opgaven: Bewijs deze laatste bewering. Verifiër dat de gemiddelde waarde van $f(t)$ inderdaad gelijk is aan de afstand waardoor $f(t)$ verschoven is om $g(t)$ te leveren. Bereken de fouriercoëfficiënten.

8.6.3. Een derde voorbeeld is de z.g. enkelzijdig gelijkgerichte sinus-functie van fig.136. De benaming ontstaat uit de wijze waarop dergelijke functies in de elektronica optreden, nl. bij de gelijkrichting van een wisselstroom m.b.v. diodes, waarbij de negatief gaande delen van de stroom worden onderdrukt.



Deze functie is symmetrisch: M.b.v. (8.24) vinden wij:*)

$$a_0 = \frac{2K}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{K}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos \phi) d\phi = \frac{K}{\pi},$$

(waarbij $\phi = \omega t$ en $dt = \frac{1}{\omega} d\phi = \frac{T}{2\pi} d\phi$),

$$a_n = \frac{4K}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2K}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos \phi \cos n\phi) d\phi$$

$$= \frac{-K}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos(n+1)\phi + \cos(n-1)\phi) d\phi$$

$$= \frac{-K}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} \{ \sin(n+1)\pi - \sin(n+1)\frac{\pi}{2} \} + \frac{1}{n-1} \{ \sin(n-1)\pi - \sin(n-1)\frac{\pi}{2} \} \right)$$

mits $n \neq 0, 1$

$$= \frac{-K}{\pi} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \cos \frac{n\pi}{2}, \quad (n \neq 0, 1)$$

$$= \frac{-2K}{\pi(n^2-1)} (-1)^{n/2}, \quad (n \text{ even}, n \neq 0, 1).$$

$$a_1 = \frac{-K}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos 2\phi + 1) d\phi = -\frac{1}{2}K$$

De fourierreeks is derhalve

$$K \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \phi + \frac{2}{1.3\pi} \cos 2\phi - \frac{2}{3.5\pi} \cos 4\phi + \dots \right).$$

Het valt op dat met uitzondering van de eerste harmonische, alle harmonischen van even orde zijn. Dit doet het vermoeden dat als wij de eerste harmonische van de gegeven functie aftrekken, de fourierreeks van de resulterende functie slechts uit even harmonischen bestaat. Dit betekent dat de periode van de nieuwe functie de helft is van de periode van de oorspronkelijke functie. Dit blijkt inderdaad juist te zijn. Als wij bij de functie van fig. 136. de term $\frac{1}{2}K \cos \phi$ optellen, dan resulteert de dubbelzijdig gelijkgerichte cosinusfunctie (fig.137).

*)Vanaf dit punt duidt in de rest van dit hoofdstuk het symbool ϕ een variabele aan. Het moet niet worden verward met de constante ϕ op blz. 206 en 212.

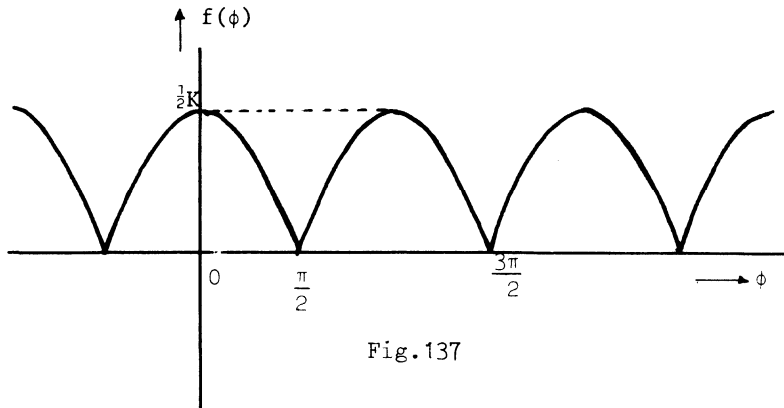


Fig.137

Opgave: Verifiër door direkte berekening dat de fouriercoëfficiënt a_n van fig.137 gelijk is aan de fouriercoëfficiënt a_{2n} van fig.136.

8.7. Convergentie van fourierreeksen

Wij zullen nu ingaan op de kwestie van het gelijk stellen van een periodieke functie aan haar oneindige fourierreeks.

Tot dusverre hebben wij steeds gesproken over de benadering van de functie door een eindige fourierreeks zonder te bepalen of de fout die gemaakt wordt door de functie door de reeks te vervangen, willekeurig klein kan worden gemaakt.

8.7.1. De functieklassse

Wij moeten eerst iets zeggen over de verzameling van functies welke door fourierreeksen mogen worden vervangen. In de eerste plaats moet de functie periodiek zijn. Verder moeten alle integralen (8.17) en (8.18) bestaan; anders is de afleiding van de fouriercoëfficiënten niet geldig zodat er dan geen sprake kan zijn van een fourierreeks. In plaats van ons verder te begeven op het gebied van de fouriertheorie in haar meest algemene vorm, welke tot vrij moeilijke wiskundige analyse kan leiden, zullen wij ons beperken tot een speciale klasse van functies, in casu die functies welke strikt genomen fysische processen beschrijven.

Het is nl. een axioma van de deterministische fysica dat alle fysische processen in wezen continu met de tijd verlopen. Het kan lijken alsof wij

met een discontinu proces te maken hebben; een verfijning van de theorie of de meettechniek toont echter aan dat wat op het eerste gezicht een discontinue functie lijkt toch continu is wanneer wij de tijdschaal in de omgeving van de "discontinuïteit" voldoende uitrekken. Figuur 138 toont twee typische wijzen waarop een functie dat een fysisch proces beschrijft in het interval Δt kan verlopen. Zo'n functie is niet alleen continu maar

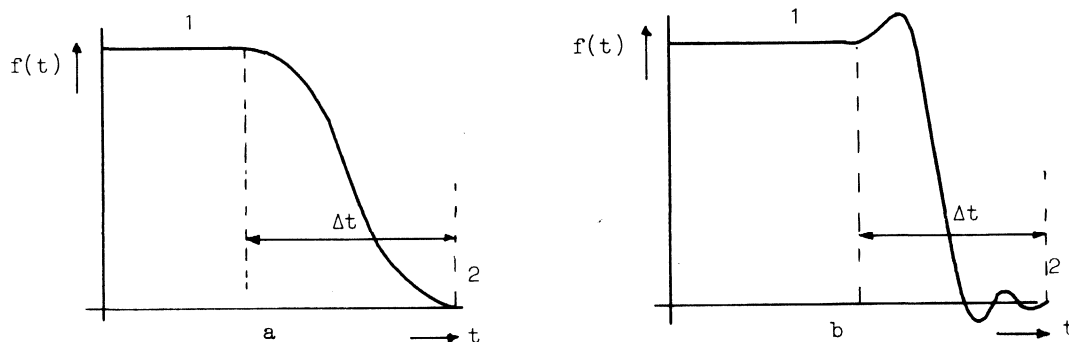


Fig.138

ook differentieerbaar. Bovendien zullen wij aannemen dat de tweede afgeleide overal bestaat. Dit maakt de verdere wiskundige theorie aanzienlijk gemakkelijker dan in het geval van discontinue functies. Wat echter van groot belang te realiseren is, is dat het preciese verloop van de functie in het (kleine) interval Δt meestal niet bekend is, juist omdat de theorie van het proces onvoldoende rekening houdt met allerlei parasitaire effecten of omdat de meettechnieken ontoereikend zijn om het proces volledig te registreren. De ontwikkeling van oscillografen in de laatste jaren toont echter aan dat dit laatste nauwelijks een beperking behoeft te zijn.

Alleen zijn bekend de waarden van de functie aan het begin en einde van het interval Δt . Het is dus onder deze voorwaarde onmogelijk om de functie in het interval met een fourierreeks te approximeren. De analoge situatie in de algemene theorie is dat in een punt waar de functie discontinu is, en in de onmiddellijke omgeving hiervan, een vreemd verschijnsel optreedt dat bekend staat als het verschijnsel van Gibbs, waarop wij later zullen terug komen.

8.7.2. Sommatie van een fourierreeks

Wij zullen nu een andere uitdrukking voor de eindige fourierreeks van een functie vinden, waarmee het mogelijk zal zijn een schatting te geven van het verschil tussen de functie zelf en de som van de reeks.

Schrijven wij

$$S_N = \sum_{-N}^N c_n e^{jn\omega t},$$

dan is

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{-N}^N \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right) e^{jn\omega t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{-N}^N \int_0^T (f(\tau) e^{-jn\omega(\tau-t)}) d\tau, \end{aligned}$$

daar de term $e^{jn\omega t}$ een constante is voor wat de integratie betreft.

$$S_N = \frac{1}{T} \int_0^T (f(\tau) \sum_{-N}^N e^{-jn\omega(\tau-t)}) d\tau.$$

Schrijven wij $x = e^{j\omega(\tau-t)}$, dan is

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N e^{-jn\omega(\tau-t)} &= x^N (1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-2N}) \\ &= \frac{x^N (1 - x^{-(2N+1)})}{1 - x^{-1}} \\ &= \frac{x^{N+\frac{1}{2}} - x^{-(N+\frac{1}{2})}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\omega(\tau-t))}{\sin(\frac{1}{2}\omega(\tau-t))}. \end{aligned} \tag{27}$$

Derhalve is

$$S_N = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\omega(\tau-t))}{\sin(\frac{1}{2}\omega(\tau-t))} d\tau.$$

Wij voeren nu een nieuwe variabele in:

$$\omega(\tau-t) = \phi, \text{ zodat } \tau = \frac{\phi}{\omega} + t, \quad d\phi = \omega d\tau = \frac{2\pi}{T} d\tau.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Dan is } S_N &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} d\phi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} d\phi
 \end{aligned} \tag{28}$$

wegens de periodiciteit van de integrand en wegens (8.22).

Deze uitdrukking staat bekend als de integraal van Dirichlet.

Daar $f(t)$ continu en differentieerbaar is, kunnen wij aan de hand van de middelwaardstelling van de differentiaalrekening schrijven:

$$f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) = f(t) + \frac{\phi}{\omega} f'\left(t + k\frac{\phi}{\omega}\right),$$

waarin $0 < k < 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{Derhalve is } S_N &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} d\phi \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi}{\omega} f'\left(t + \frac{k\phi}{\omega}\right) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} d\phi.
 \end{aligned} \tag{29}$$

In de eerste integraal kunnen de sinustermen worden omgezet in een reeks van exponentiële functies volgens (8.27). De integraal van ieder van deze functies over een periode is nul behalve in het geval van de nulde harmonische. Hierin is de term $f(t)$ een constante voor wat de integratie betreft. Wij vinden dan dat deze integraal gelijk aan $f(t)$ is.

Wij hebben dus gevonden dat de som van de eindige fourierreeks gelijk is aan de som van $f(t)$ en de tweede integraal. Deze term geeft dan de fout aan bij het afkappen van de fourierreeks na N harmonischen. Als wij kunnen aantonen dat deze integraal naar nul nadert als $N \rightarrow \infty$, voor alle waarden van t , dan zal de convergentie van de fourierreeks voor alle waarden van t zijn bewezen. Wij zullen nu bewijzen dat een integraal van de vorm

$$\int_a^b T(\phi) \sin m\phi d\phi \tag{30}$$

inderdaad naar nul nadert als $m \rightarrow \infty$, mits $T(\phi)$ differentieerbaar op het

interval (a, b) is. Als zodanig is dit een speciale vorm van de hulpstelling van Riemann en Lebesgue. M.b.v. partiële integratie vinden wij

$$\int_a^b T(\phi) \sin m\phi \, d\phi = -\frac{1}{m} \left\{ (\cos m\phi T(\phi)) \Big|_a^b - \int_a^b T'(\phi) \cos m\phi \, d\phi \right\}.$$

De termen tussen accoladen zijn alle begrensd omdat $T'(\phi)$ bestaat en integreerbaar is. Als $m \rightarrow \infty$, nadert het gehele rechterlid naar nul.

$$\text{Stellen wij nu } T(\phi) = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi} f' \left(t + \frac{k\phi}{\omega} \right),$$

$m = N + \frac{1}{2}$, $a = -\pi$, $b = \pi$, dan voldoet de tweede integraal in (8.29) aan de voorwaarden van de hulpstelling, aangezien $f''(\phi)$ overal bestaat en $\frac{\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi}$ differentieerbaar is.

Hiermede is bewezen dat voor de klasse van functies die hier beschouwd is, de fourierreeks naar $f(t)$ voor alle t convergeert.

Opmerkingen: De achtergrond van de convergentie ligt in de structuur van de integraal (8.28). In de omgeving van $\phi = 0$ is de integrand $\approx (2N+1) f(t)$, wegens de continuïteit van $f(t)$ en het feit dat $\sin x \approx x$, $|x| \ll 1$. Deze benadering geldt op een interval van breedte $\approx \frac{2\pi}{2N+1}$. Buiten dit interval oscilleert de integrand met toenemende frequentie als N toeneemt.

Aangezien $\frac{f(t + \frac{\phi}{\omega})}{\sin \frac{1}{2}\phi}$ continu is, is dan de bijdrage tot de integraal

praktisch nul, mits $f(\phi)$ veel langzamer dan $\sin(N+\frac{1}{2})\phi$ varieert. Hierdoor is ook duidelijk in te zien dat wanneer de functie snel varieert, vele hogere harmonischen nodig zijn voor het verkrijgen van een goede benadering tot de functie.

Opgave: Schets de kernfunctie $\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi}$ voor $N = 10$. Schets ook het

product van deze functie en $f(t + \frac{\phi}{\omega})$ waarbij voor $f(t)$ wordt gekozen een langzaam variërende functie.

Nadere opmerkingen: De uitdrukkingen (8.28) en (8.30) vormen ook de basis voor de discussie van de convergentie van fourierreeksen wanneer $f(t)$ tot algemenere functieklassen behoort dan de hier

behandelde. Men moet dan gebruik maken van meer geavanceerde analytische methoden om de convergentie te bewijzen. De bewijzen zelf zijn in het algemeen ook langer dan wat hier is aangevoerd.

8.8. Differentiëren en integreren van fourierreksen

De fouriercoëfficiënten van een functie $f'(\phi)$, met periode 2π , worden gegeven door

$$c'_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(\phi) e^{-jn\phi} d\phi.$$

M.b.v. partiële integratie volgt

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ f(\phi) e^{-jn\phi} \Big|_0^{2\pi} + jn \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \right\} \\ &= jnc_n, \end{aligned} \tag{31}$$

waarin c_n de fouriercoëfficiënten van $f(\phi)$ zijn.

Dit betekent dat de fourierreks van $f'(\phi)$, nl.

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c'_n e^{+jn\phi},$$

wordt verkregen uit de fourierreks van $f(\phi)$ door de

reeks term voor term te differentiëren. Men moet wel goed bedenken dat

als de reeks $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\phi}$ convergeert naar $f(\phi)$, de reeks $\sum_{-\infty}^{\infty} jnc_n e^{jn\phi}$

niet hoeft te convergeren naar $f'(\phi)$. De convergentie hangt van de eigenschappen van $f'(\phi)$ af. In vele gevallen kan dit resultaat echter nuttig zijn. B.v. de functie van fig.133 is op een constante factor na de afgeleide van de functie van fig.135.

Omgekeerd, wanneer de fourierreks van een functie $f(\phi)$ bekend is, kan ruwweg gesproken de fourierreks van de integraal van deze functie worden gevonden door de gegeven fourierreks term voor term te integreren. Er zijn echter twee complicaties waarop wij speciaal moeten letten. In de eerste plaats is de functie

$$F(\phi) = \int_0^{\phi} f(\xi) d\xi \quad (32)$$

alleen periodiek met periode 2π als $F(\phi) = F(\phi+2\pi)$, d.w.z.

$$\int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\xi) d\xi = 0, \text{ zodat de gemiddelde waarde van } f(\phi) \text{ over een}$$

periode nul moet zijn. Voldoet $f(\phi)$ niet aan deze eis dan moeten wij werken met de functie $f(\phi) - c_0$ in plaats van $f(\phi)$.

De fouriercoëfficiënten van $F(\phi)$ worden gegeven door

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{jn} F(\phi) e^{-jn\phi} \right)_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{jn} \int_0^{2\pi} F'(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \right) \\ &= \frac{c_n}{jn} \quad (\text{mits } n \neq 0), \quad \text{aangezien } F'(\phi) = f(\phi). \end{aligned}$$

Dus met uitzondering van de constante term, volgt de fourierreeks van $F(\phi)$ uit de fourierreeks van $f(\phi)$ door term voor term te integreren. De constante term d_0 volgt uit een berekening van de gemiddelde waarde van $F(\phi)$. Als de fourierreeks van $f(\phi)$ convergeert dan convergeert de fourierreeks van $F(\phi)$ ook, omdat $F(\phi)$ tot dezelfde functieklassie behoort als $f(\phi)$. In feite kunnen wij veel verder gaan: in de algemene theorie wordt bewezen dat het feit dat $F(\phi)$ de integraal van een functie is, is voldoende de convergentie van de fourierreeks van $F(\phi)$ te garanderen. Wij kunnen dus schrijven

$$F(\phi) = d_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{jn} e^{jn\phi}.$$

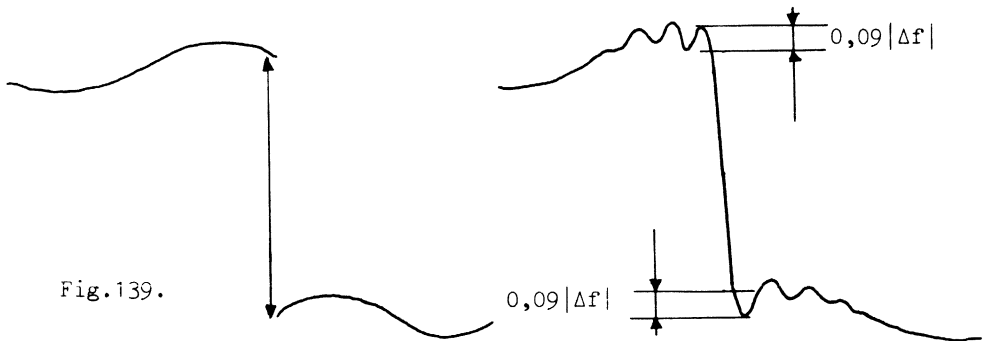
Volgens (8.31) is $F(0) = 0$, waaruit volgt

$$d_0 = -\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{jn} = -\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad \text{vanwege (8.7).}$$

In het algemeen is dit geen manier om de constante d_0 te bepalen, maar wel de som van de reeks $\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n}$, daar d_0 gemakkelijk uit de gemiddelde waarde van $F(\phi)$ volgt.

8.9. Het verschijnsel van Gibbs

Wanneer de functie $f(t)$ met periode T een eenvoudige discontinuïteit in het punt t_0 bezit, dan convergeert de fourierreeks in de onmiddellijke omgeving van t_0 niet naar $f(t)$, alhoewel het interval - de verzameling van t -waarden - waarop de convergentie niet opgaat steeds kleiner wordt als $N \rightarrow \infty$. De fourierreeks gedraagt zich zoals in fig. 139 is weergegeven.



$$\Delta f = f(0^+) - f(0^-)$$

De som van de eindige fourierreeks vertoont een "overslingering" in de omgeving van t_0^- en ook in de omgeving van t_0^+ . Deze overslingering draagt maximaal 0,09 maal de sprong in de functiewaarde in t_0 .

Als $N \rightarrow \infty$, komen de overslingeringen steeds dichterbij t_0 . De maximale waarde blijft echter gelijk voor alle N .

De achtergrond voor dit verschijnsel ligt in de structuur van de integrand van de integraal van Dirichlet. Wij hebben reeds opgemerkt dat voor grote N , alleen de integrand in de omgeving van $\phi = 0$ van belang is, mits buiten deze omgeving $f(t)$ continu en differentieerbaar is.

Schrijven wij in het vervolg

$$E(\phi) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin \frac{1}{2}\phi},$$

$$\text{dan is } 2\pi S_N = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) E(\phi) d\phi,$$

met $\delta > 0$ maar anders willekeurig klein. Dan naderen de integralen over de intervallen $(-\pi, -\delta)$ en (δ, π) naar nul als $N \rightarrow \infty$ (Riemann - Lebesgue), mits $f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right)$ continu op deze intervallen is, d.w.z. als de discontinuitéit op het interval $(-\delta, \delta)$ ligt, ofwel $-\delta < \omega(t_0 - t) < \delta$.

Onder deze voorwaarden is dan

$$2\pi S_N \approx \int_{-\delta}^{\delta} f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) E(\phi) d\phi \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

Stel nu $\omega(t - t_0) = x$.

$$\begin{aligned} \text{Dan is } 2\pi S_N &\approx \int_{-\delta}^{-x} + \int_{-x}^x + \int_x^{\delta} f\left(\frac{\phi}{\omega} + t\right) E(\phi) d\phi \\ &\approx \int_{-\delta}^{-x} f(t_0^-) E(\phi) d\phi + \int_{-x}^{\delta} f(t_0^+) E(\phi) d\phi, \end{aligned}$$

wegens het feit dat $f(t)$ continu is, behalve in het punt t_0 , en aangezien δ willekeurig klein is.

Schrijven wij $f_e = \frac{1}{2}(f(t_0^+) + f(t_0^-))$, $f_0 = \frac{1}{2}(f(t_0^+) - f(t_0^-))$,

$$\begin{aligned} \text{dan is } 2\pi S_N &\approx \int_{-\delta}^{-x} (f_e - f_0) E(\phi) d\phi + \int_{-x}^{\delta} (f_e + f_0) E(\phi) d\phi \\ &= f_e \int_{-\delta}^{\delta} E(\phi) d\phi + f_0 \left\{ \int_{-x}^x E(\phi) d\phi + \int_x^{\delta} E(\phi) d\phi \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\delta}^{-x} E(\phi) d\phi \right\}. \end{aligned}$$

Maar $E(\phi)$ is een even functie, zodat de laatste twee integralen gelijk zijn maar tegengestelde voortekens hebben.

$$\text{Derhalve is } S_N \approx \frac{1}{2\pi} \left\{ f_e \int_{-\delta}^{\delta} E(\phi) d\phi + f_0 \int_{-x}^x E(\phi) d\phi \right\}.$$

Maar bij grote N is

$$\int_{-\delta}^{\delta} E(\phi) d\phi \approx \int_{-\pi}^{\pi} E(\phi) d\phi = 2\pi, \quad \text{wegens (8.27) en de hulpstelling}$$

van Riemann en Lebesgue.

$$\text{Derhalve is } S_N \approx f_e + \frac{2f_0}{2\pi} \int_0^x E(\phi) d\phi, \quad (33)$$

daar $E(\phi)$ even is.

Deze uitdrukking is maximaal wanneer $|x|$ maximaal wordt gekozen en wel zodanig dat de integrand steeds positief op het interval $(0, x)$ is. (Een schets van de functie $E(\phi)$ toont gauw aan dat deze bewering wel juist is. Men kan ook natuurlijk een rigoreus bewijs leveren dat echter enige analytische kennis vergt).

Wij komen dan tot een beschouwing van de integraal

$$\int_0^x \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\phi)}{\sin \frac{1}{2}\phi} d\phi.$$

De maximale waarde wordt dan bereikt met x gelijk aan het eerste nulpunt na de oorsprong van $\sin(N+\frac{1}{2})\phi$, nl. $\pm \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$. Met de substitutie $(N+\frac{1}{2})\phi = \theta$, vinden wij

$$\pm \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2N+1}} \frac{d\theta}{N+\frac{1}{2}} \quad \text{als de numerieke maximale waarde van de integraal.}$$

Bij grote N is $\sin \frac{\theta}{2N+1} \approx \frac{\theta}{2N+1}$ zodat de integraal =

$$= 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta \approx \pm 1,179 \pi.$$

Dit laatste resultaat volgt uit een numerieke berekening van de integraal (zie b.v. Jahnke-Ende, *Tafeln höherer Funktionen*). Tenslotte wordt aan de hand van (8.33) de extreme waarde van S_N in de omgeving van de discontinuïteit gegeven door

$$\frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)) \pm \frac{1,179}{2} (f(t_0+) - f(t_0-)),$$

waarbij het plusteken geldt voor $x > 0$ en het minteken voor $x < 0$, en $x = \omega(t-t_0) = \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}$.

Dus voor $t = t_0 + \frac{\pi}{\omega(N+\frac{1}{2})}$ is $S_N = f(t_0^-) + 1,09 (f(t_0^+) - f(t_0^-))$

voor $t = t_0 - \frac{\pi}{\omega(N+\frac{1}{2})}$ is $S_N = f(t_0^-) - 0,09 (f(t_0^+) - f(t_0^-))$.

Opmerkingen

De functie $\int_0^x \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$ komt herhaaldelijk in de communicatietheorie

alsmede in bepaalde antenna- en radarvraagstukken voor. Al deze toepassingen hebben min of meer met fourierreeksen te maken.

Het verschijnsel van Gibbs is goed waar te nemen op een oscilloscoop onder de volgende omstandigheden.

Een periodiek signaal (spanning of stroom) met een scherpe overgang van één niveau naar een ander wordt opgelegd aan de ene poort van een netwerk. Dit ingangssignaal bezit een fourierreeks waarvan de lager harmonischen nauwelijks te onderscheiden zijn van de fourierreeks van een discontinue functie die de signaalfunctie benaderd (fig.140a).

Het netwerk heeft een frequentiekarakteristiek die vlak loopt van 0 tot een bepaalde frequentie ω_0 en daarboven snel naar nul loopt. Wanneer de fourierreeks van het ingangssignaal vele harmonischen met frequenties boven ω_0 bevat, dan laat het netwerk de lagere harmonischen (maar met faseverschuiving) door terwijl de hogere harmonischen scherp afgeknapt worden. Het uitgangssignaal bestaat dan in eerste benadering uit een eindige fourierreeks die een goede benadering vormt voor de eindige fourierreeks die bij de discontinue functie behoort.

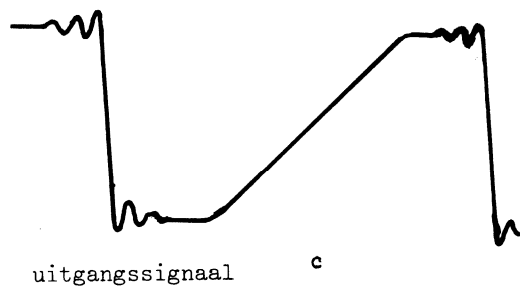
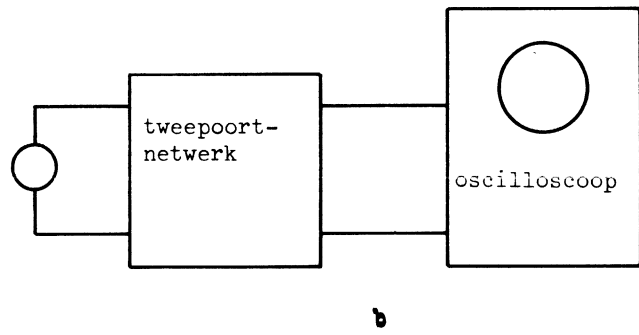
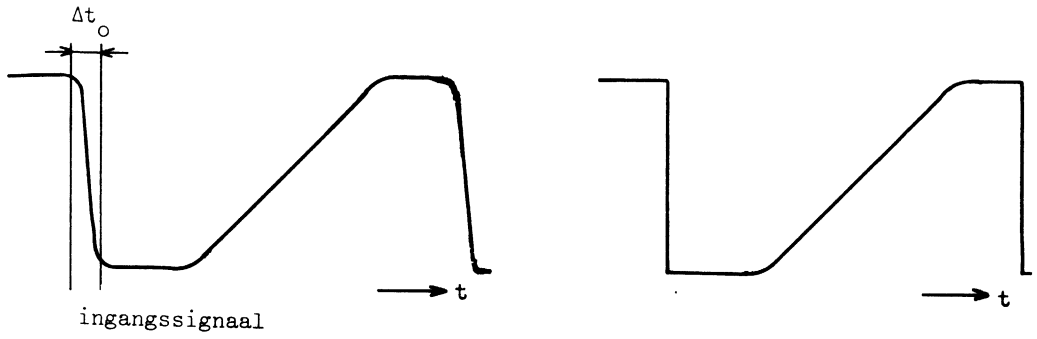
Zoals wij nu weten vertoont de eindige fourierreeks van de discontinue functie het verschijnsel van Gibbs; het uitgangssignaal geeft een benadering van het verschijnsel weer.

Literatuur: E.A. Guillemin, The Mathematics of Circuit Analysis.

E.C. Titchmarsh, The Theory of Functions.

H. Jeffreys and B.S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics.

Fig. 140.



9. LINEAIRE, ACTIEVE EN NIET-RECIPROKE NETWERKEN

9.1. Inleiding

Tot dusverre beschouwden wij slechts schakelingen met spannings- en stroombronnen waarvan de bronsterkten onafhankelijk waren van het aangesloten netwerk. De bronsterkten waren voor alle tijd gedefinieerde variabelen onafhankelijk van circuit-grootheden zoals stroomsterkten in en spanningen over takken ergens in het netwerk.

Aan het begin van dit college zijn wij uitgegaan van fysische toestellen (accu, weerstanden, spoelen en condensatoren) waarvan de karakteristieken steeds niet-lineair zijn. Wij hebben toen deze toestellen geïdealiseerd tot elementen en wij hebben daarna steeds gewerkt met de ideale spanningsbron, de ideale stroombron, de ideale weerstand enz. Zie in dit verband § 1.6, § 1.7, § 3.9, § 7.3 en § 7.8.

Voor een netwerktheoretische beschrijving van elektronische schakelingen kunnen wij niet volstaan met de tot dusverre gebruikte elementen. Het blijkt in het bijzonder dat dan de behoefte bestaat aan bronnen waarvan de sterkte wèl bepaald wordt door een stroom of spanning elders in het netwerk. Dergelijke bronnen noemt men afhankelijke of bestuurde bronnen.

Voorbeeld: Wij beschouwen een metaal-oxyde-halfgeleider-veldeffecttransistor (z.g.n. M.O.S.-veldeffecttransistor). Dit is een fysisch apparaat met drie klemmen, zie fig. 141a.

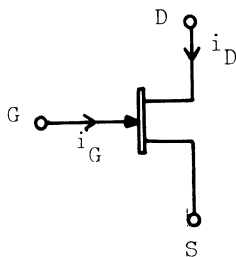


Fig. 141a.

$$i_G \approx 0$$

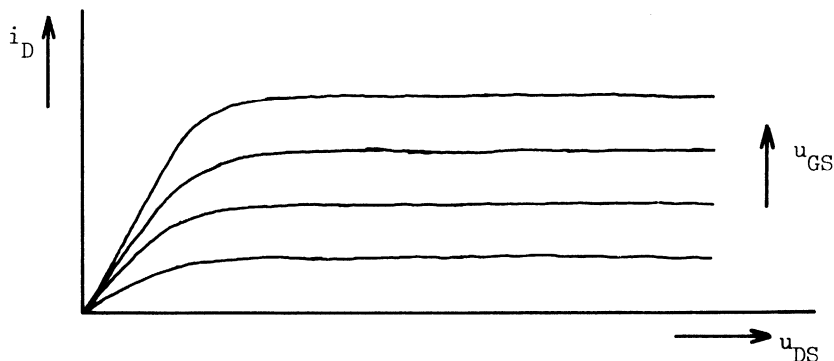


Fig. 141b.

De stroomsterkte i_D wordt bepaald door de stuurspanning u_{GS} en is bij een bepaalde instelling nagenoeg onafhankelijk van u_{DS} . Zie fig. 141b, waarbij u_{GS} als parameter is gebruikt. Verder is het duidelijk, dat het verband tussen i_D en u_{GS} niet-lineair is. Indien wij, zoals in de electronica gebruikelijk is, de spanning u_{GS} kleine variaties laten ondergaan, dan ondergaat ook i_D kleine variaties. Wij bevinden ons dan op een klein deel van een continue karakteristiek, $f(u_{GS}, u_{DS}, i_D) = 0$.

Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial u_{GS}} \Delta u_{GS} + \frac{\partial f}{\partial u_{DS}} \Delta u_{DS} + \frac{\partial f}{\partial i_D} \Delta i_D + O(\Delta u_{GS}, \Delta u_{DS}, \Delta i_D)^2 = 0.$$

Bij verwaarlozing van hogere orde termen is dit een lineair verband tussen de grootheden Δu_{GS} , Δu_{DS} en Δi_D .

Op grond van het voorgaande stellen wij vast dat de werking van deze transistor voor kleine signalen beschreven kan worden met een stroomsterkte, die bepaald wordt door een spanning, terwijl de relatie tussen deze beide variabelen in het geïdealiseerde geval lineair is.

Bij het in het voorbeeld gegeven geïdealiseerde geval spreekt men **wel** van een spanningsbestuurde stroombron of spanningsstroom-transactor.

In de netwerktheorie tekent men een dergelijke transactor als in fig. 142.

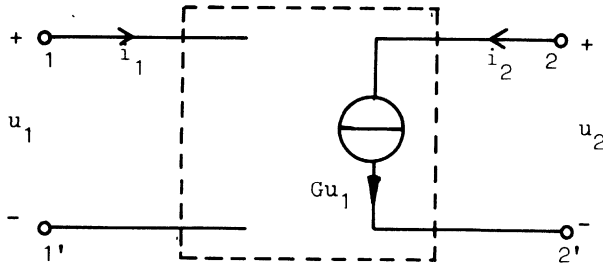


Fig.142

Hierbij geldt: $i_1 \equiv 0$ en $i_2 = G u_1$.

- Opmerkingen:
1. Het functionele verband tussen i_2 en u_1 is lineair, d.w.z. dat de grootheid G , die de dimensie van een geleiding heeft, constant is.
 2. Het feit dat $i_1 \equiv 0$ betekent dat de ingangsimpedantie Z_{11} oneindig is.
Bij de in dit voorbeeld beschouwde transistor meet men tussen de klemmen G en S een zeer hoge impedantie, zodat ook op dit punt fig. 142 een idealisering is van fig. 141a. De transactor heeft één niet-energetische poort.
 3. Het schema van de transactor wordt gekenmerkt door een galvanische scheiding tussen de poorten. In de eerste plaats kan men met de transactor van fig. 142 een drieklemmennetwerk maken als fig. 141a door de klemmen 1' en 2' met elkaar te verbinden en ten tweede is bij een werkelijke transistor steeds een koppeling (b.v. capacitief) tussen beide poorten aanwezig. Voor een redelijke realisatie van de spanningsstroom-transactor, dus met galvanische scheiding tussen de poorten, moet men schakelingen met meer transistoren gebruiken.

9.2. Transactoren

Wij kunnen ons afvragen of de beschouwde ideale spanningsbestuurde stroombron, die gekenmerkt wordt door 1e. één niet-energetische poort en

2e. een lineaire relatie met slechts één parameter, niet deel uitmaakt van een klasse tweepoortnetwerken met deze kenmerken. Er blijken de volgende vier gevallen denkbaar.

9.2.1. De spannings-stroom-transactor.

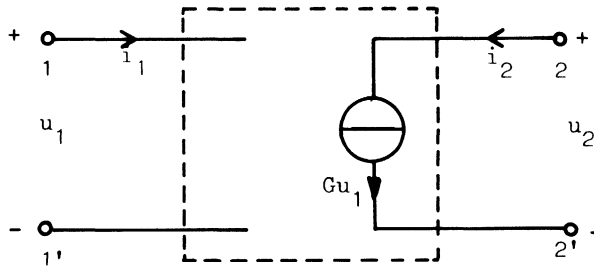


Fig.143

Deze wordt gekenmerkt door:

$$i_1 \equiv 0 \text{ en } i_2 = G u_1.$$

De reële constante G heeft de dimensie van geleiding en men noemt deze in de electronica wel de steilheid of overdrachtsgeleiding. De spanning u_2 kan alle eindige waarden hebben en wordt bepaald door het op poort 2 aangesloten netwerk en i_2 . Wij bezagen deze transactor al in 9.1.

9.2.2. De spannings-spanningstransactor

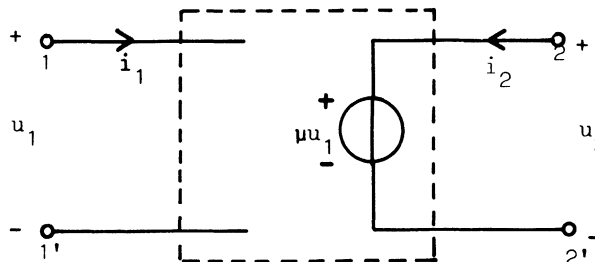


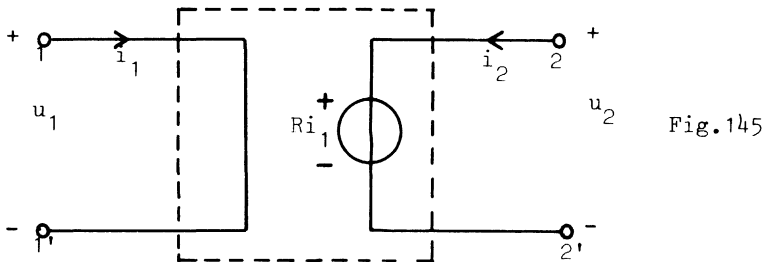
Fig.144

Deze wordt gekenmerkt door:

$$i_1 \equiv 0 \text{ en } u_2 = \mu u_1.$$

De constante μ is dimensieloos en heet in de elektronica de spanningsversterking. De stroomsterkte i_2 kan alle eindige waarden hebben en wordt bepaald door het op poort 2 aangesloten netwerk en u_2 .

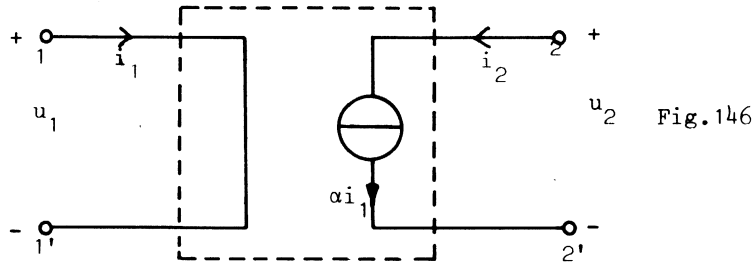
9.2.3. Een niet-energetische poort kunnen wij ook verkrijgen indien $u_1 \equiv 0$. Uitgaande van deze gedachte komen wij tot de stroomspanningstransactor.



Deze wordt gekenmerkt door:

$$u_1 \equiv 0 \text{ en } u_2 = R i_1.$$

De constante R heeft de dimensie van weerstand en heet de overdrachtsweerstand. De stroom i_2 kan alle eindige waarden hebben en wordt bepaald door het op poort 2 aangesloten netwerk en u_2 .

9.2.4. De stroom-stroom-transactor

Deze wordt gekenmerkt door:

$$u_1 \equiv 0 \text{ en } i_2 = \alpha i_1.$$

De constante α is dimensieloos en heet de stroomversterking. De spanning u_2 kan alle eindige waarden hebben en wordt bepaald door het op poort 2 aangesloten netwerk en i_2 .

9.3. Enkele opmerkingen

9.3.1. De voor de ideale transactoren kenmerkende relaties zijn zoals reeds is gezegd, lineair. De transactoren worden gekenmerkt door één reële parameter. In dit opzicht verschillen zij niet van alle andere ingevoerde netwerkelementen.

9.3.2. Bij alle transactoren behoort één niet-energetische poort.

9.3.3. De combinatorische relaties laten slechts vier verschillende mogelijkheden voor transactoren toe. De klasse der transactoren omvat dus vier types.

9.3.4. De transactoren zijn niet alle als onafhankelijke elementen op te vatten. Schakelt men b.v. een stroom-spanningstransactor achter een spannings-stroomtransactor (in cascade) dan krijgt men een tweepoortnetwerk met de eigenschappen van een spannings-spanningstransactor. Wij komen in § 9.7. nog nader op deze onderlinge afhankelijkheid terug.

9.3.5. De transactoren zijn actief. Met andere woorden, zij kunnen door de poorten meer energie afgeven dan zij daardoor ontvangen hebben. Immers bij alle beschouwde transactoren neemt poort 1 geen vermogen op en geeft geen vermogen af (die poort is niet-energetisch); terwijl als men de poorten 2 aansluit op een weerstand, de transactoren alle een positief vermogen aan de weerstand afgeven, hierbij is aangenomen dat de stuurspanning u_1 , resp. de stuurstroom i_1 niet identiek nul zijn. In de fysische apparaten waarvan de transactoren de idealisering zijn moet energie worden omgezet in energie, die aan de actieve poort beschikbaar is. In dit opzicht verschillen de transactoren niet van gewone bronnen (§ 1.7). In het geval van elektronische schakelingen vindt de omzettingen van voedingsenergie in signaalenergie plaats. Deze omzetting geschiedt als gevolg van de essentieel niet-lineaire karakteristieken van de elektronische componenten.

9.3.6. De transactoren zijn niet-reciprook.

- a. In het bewijs voor het reciprociteitstheorema (§ 2.2.2. blz. 48) werd gebruikt de gelijkheid

$$\sum_{\mathbf{w}} U_{\mathbf{K}}' I_{\mathbf{K}} = \sum_{\mathbf{w}} U_{\mathbf{K}} I_{\mathbf{K}}',$$

Tellegen en het feit dat voor weerstanden (impedanties) de algebraïsche relatie $U_{\mathbf{K}} = R_{\mathbf{K}} I_{\mathbf{K}}$ kon worden gebruikt. Op grond daarvan werden onder 2.2.2a en b procedures gegeven waarmee men kan vaststellen of men met een reciprook netwerk te maken heeft of niet.

Opdracht: Ga voor de transactoren aan de hand van de gegeven procedures na, dat zij niet-reciprook zijn.

Opgemerkt wordt dat het gevonden resultaat in § 2.2.2 (en dus ook hierboven) geldt voor grootheden, die niet met de tijd veranderen, (gelijkstroom, resp. de complexe coëfficiënten van exponentiële tijdsfuncties). De stroom-spannings-relaties, die dan algebraïsch zijn, zijn tijdsafhankelijk; er komen b.v. geen differentiaalquotienten in voor.

Waar echter de tijd niet expliciet voorkomt in de kenmerkende relaties, is de reciprociteit wel geldig voor tijdsafhankelijke grootheden. Dit is de situatie voor lineaire netwerken.

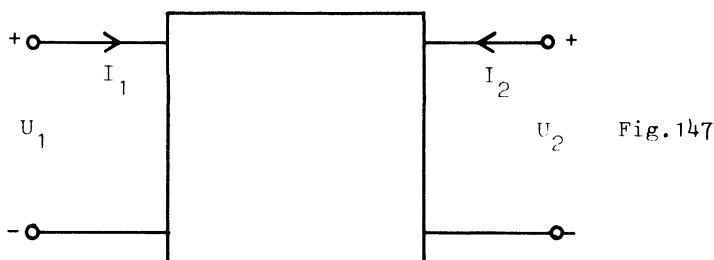
In een enkel geval vertoont ook een niet-lineaire schakeling reciprociteit. Wij gaan echter hierop niet verder in.

b. Men kan voor een tweepoort (fig. 147) vaak schrijven:

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2,$$

waarmee de eigenschappen van de tweepoort vastgelegd zijn met 4 parameters.



Opdracht: Ga na dat, in het geval men een reciproke tweepoort heeft, geldt: $Z_{12} = Z_{21}$.

Opdracht: Ga na, dat men van de transactoren de eigenschappen niet altijd met de genoemde Z-parameters kan beschrijven. Het reciprociteitscriterium uitgedrukt in Z-parameters kan dus niet altijd worden gebruikt.

c. Opdracht: Toon aan dat de eigenschappen van de transactoren wèl kunnen worden beschreven met:

$$U_1 = K_{11}U_2 - K_{12}I_2$$

$$I_1 = K_{21}U_2 - K_{22}I_2,$$

dus eveneens met 4 parameters.

Het is nu mogelijk een criterium voor reciprociteit te vinden uitgedrukt in deze K-parameters.

Wij zullen dit criterium afleiden volgens de definitie dat een reciproke tweepoort voor elke mogelijke constante U en I voldoet aan:

$$U_1 'I_1 + U_2 'I_2 = U_1 I_1' + U_2 I_2'.$$

Substitutie geeft:

$$(K_{11}U_2' - K_{12}I_2')(K_{21}U_2 - K_{22}I_2) + U_2'I_2 =$$

$$(K_{11}U_2 - K_{12}I_2)(K_{21}U_2' - K_{22}I_2') + U_2I_2',$$

of uitgewerkt:

$$\{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) - 1\}U_2I_2' = \{(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) - 1\}U_2'I_2.$$

Deze gelijkheid moet gelden onafhankelijk van de willekeurig te kiezen U_2 en I_2 ; immers indien de poortvariabelen geschreven kunnen worden als onder 9.3.6.c betekent dit dat U_2 en I_2 onafhankelijk van elkaar gekozen mogen worden.

Dus geldt: $K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} = 1$.

Dit is het gezochte reciprociteitscriterium.

Opricht: Toon met behulp van de K-parameters aan, dat de transactoren niet-reciprook zijn.

Opricht: Toon aan dat de ideale transformator een reciproke tweepoort is.

9.3.7. De transactoren zijn unilateraal

Indien de poorten 1 van de vier transactoren met spanning resp. stroom worden bestuurd is het vermogen aan poort 2 in het algemeen ongelijk nul. Als het vermogen aan poort 2 ongelijk nul is betekent dit niet, dat daardoor een spanning of een stroom aan poort 1 wordt "gegenereerd". Wel is het zo dat het vermogen aan poort 2 niet identiek nul is, alleen als aan poort 1 spanning of stroom bestaat. De sturende grootte aan poort 1 kan worden opgevat als de "oorzaak" van de bestuurdte grootte ("gevolg") aan poort 2 en niet omgekeerd ondanks het feit dat beide tegelijk optreden). Het vermogen aan poort 1 is altijd nul, terwijl het vermogen aan poort 2 niet identiek nul is. Anders geformuleerd, hier is $K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} = 0$.

*) Zie blz.261, noot.

Wij zeggen in een dergelijk bijzonder geval van niet-reciprociteit, dat de tweepoort unilateraal is.

9.3.8. Evenals de andere netwerk-elementen wordt elke transactor gekenmerkt door slechts één parameter.

9.4. Voorbeelden van schakelingen met bestuorde bronnen.

Wij gaan er hierbij van uit dat de spanningen en stromen exponentiële functies van de tijd zijn waarmee complex kan worden gerekend.

9.4.1.

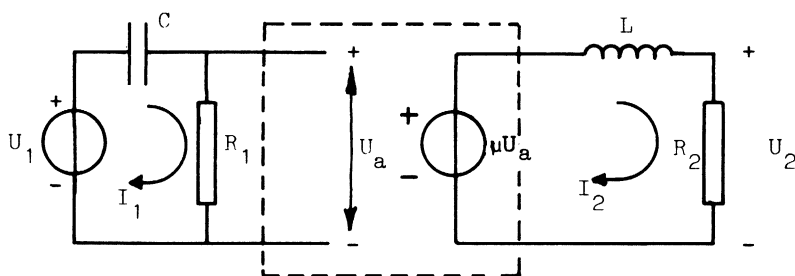


Fig. 148

Gevraagd: a. de spanningsoverdracht $H = \frac{U_2}{U_1}$

b. de vermogensversterking A_p .

a. De spanningsoverdracht is te bepalen via spanningsdeling.

$$H = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \cdot \mu \frac{R_1}{R_1 + 1/j\omega C}$$

$$H = \frac{j\omega\mu R_1 R_2 C}{R_2 - \omega^2 L C R_1 + j\omega(L + R_1 R_2 C)}.$$

Het ligt voor de hand dat $|H|$ evenredig is met de spanningsversterking μ .

Van de spanningsoverdracht kan men als alle circuit-parameters bekend zijn op de gebruikelijk manier, b.v. een polaire figuur, tekenen.

b. Het vermogen dat de bron U_1 afgeeft is

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R_1 C^2}{(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)} |U_1|^2.$$

Het vermogen afgegeven in R_2 is:

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \mu^2 R_1^2 C^2 R_2}{(R_2 - \omega^2 L C R_1)^2 + \omega^2 (L + R_1 R_2 C)^2} |U_1|^2,$$

$$A_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_2}{P_1} = \frac{\mu^2 R_1 R_2 (1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{(R_2 - \omega^2 L C R_1)^2 + \omega^2 (L + R_1 R_2 C)^2}.$$

9.4.2.

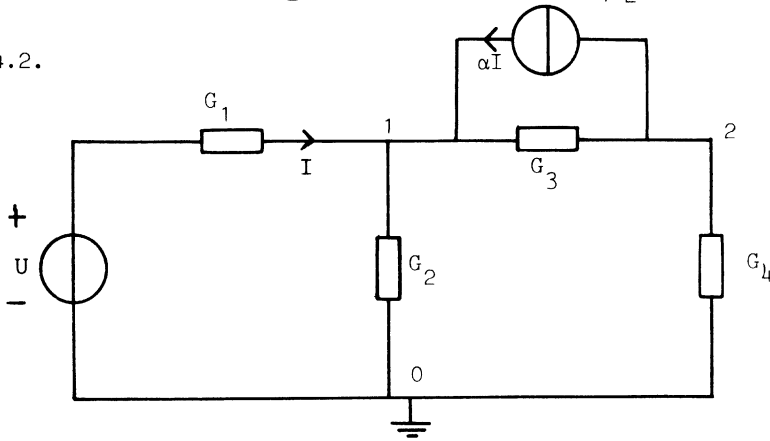


Fig. 149

Gevraagd: de spanning U_{20} . Wij gaan hiertoe uit van de knooppuntmethode.

Voor knooppunt 1 geldt:

$$I + \alpha I = (G_2 + G_3)U_{10} - G_3 U_{20}.$$

Voor knooppunt 2 geldt:

$$-\alpha I = -G_3 U_{10} + (G_3 + G_4)U_{20}.$$

Terwijl voor de stroom I in G_1 geschreven kan worden:

$$I = G_1(U - U_{10}).$$

Eliminatie van U_{10} en I uit deze drie vergelijkingen levert:

$$U_{20} = \frac{G_1(G_3 - \alpha G_2)}{G_1 G_3 + (1 + \alpha)G_1 G_4 + G_2 G_3 + G_2 G_4 + G_3 G_4} U.$$

9.4.3. Op lineaire netwerken, die slechts via één poort verbonden zijn aan een ander netwerk en daarvan verder volledig zijn gescheiden, kan men de stellingen van Thévenin en Norton toepassen. Omdat de transactoren lineair zijn, gelden voor netwerken met transactoren ook de stellingen van Thévenin en Norton.

Wij moeten er dan in het bijzonder op letten dat het lineaire netwerk door het losnemen van de verbindingen van de poort met het overige netwerk, daarvan dan ook geheel gescheiden is. Met andere woorden: een bron binnen het losgenomen deel mag niet worden bestuurd door een spanning of een stroom buiten dat deel.

9.4.4. Voorbeeld

Gevraagd: het thévenin-equivalent van de schakeling van figuur 149 gezien aan de klemmen 2 en 0. Wij merken op dat voldaan is aan de voorwaarden gesteld onder 9.4.3.

De thévenin-spanning U_T is de spanning U_{20} berekend in § 9.4.2.

De norton-stroom I_N volgt na kortsluiten van de klemmen 2 en 0 uit:

$$I + \alpha I = (G_2 + G_3)U_{10},$$

$$I = G_1(U - U_{10}) \text{ en}$$

$$I_N = G_3 \cdot U_{10} - \alpha I.$$

Eliminatie van U_{10} en I leidt tot

$$I_N = \frac{G_1(G_3 - \alpha G_2)}{(1 + \alpha)G_1 + G_2 + G_3} U.$$

De thévenin-impedantie $Z_i = \frac{U_T}{I_N}$ wordt dan

$$Z_i = \frac{(1 + \alpha)G_1 + G_2 + G_3}{(G_1 + G_2)G_3 + \{(1 + \alpha)G_1 + G_2 + G_3\}G_4}.$$

Hiermee is het thévenin-equivalent bepaald.

Opmerking 1

Zoals in § 2.3 bij netwerken met uitsluitend onafhankelijke bronnen bleek, bestond er naast de mogelijkheid om de th evenin-impedantie te vinden als quoti ent van th evenin-spanning en norton-stroom nog een tweede veel gebruikte methode. Het uitgangspunt daarbij was dat indien voor een bepaald netwerk een th evenin-equivalent gevonden was, dit inhoudt dat, als alle bronsterkten in het oorspronkelijke netwerk nul gesteld werden, het netwerk aan de klemmen zich gelijk moet gedragen als wanneer in de equivalente schakeling de bronsterkte nul wordt gekozen. Aan die klemmen neemt men dan de th evenin-impedantie Z_i waar. Zodoende kon men snel Z_i vinden, meestal zonder gebruik te maken van maas- of knooppuntsvergelijkingen.

Opmerking 2

Een dergelijke procedure bestaat ook voor lineaire netwerken die ook bestuurd bronnen bevatten. Ook daar geldt dat als in het netwerk en in het equivalent daarvan de *onafhankelijke* bronsterkten nul gesteld worden de netwerken zich aan de klemmen (poorten) identiek moeten gedragen. Men dient hiertoe alle bestuurd bronnen in het netwerk ongewijzigd te laten, daar bij het bepalen van de th evenin-impedantie uit de poortspanning en poortstroom, de relatie daartussen bepaald wordt door de stroom- en spanningsverdeling in het netwerk, die op haar beurt weer afhangt van de aanwezige bestuurd bronnen.

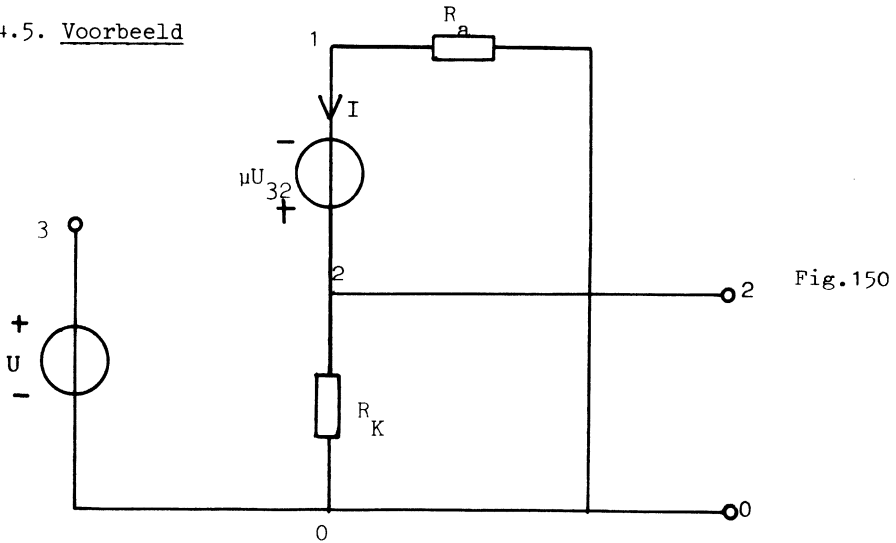
De procedure is dus: stel de bronsterkten voor alle onafhankelijke bronnen nul, terwijl de bestuurd bronnen in het netwerk blijven opgenomen. Sluit op de klemmen van het (niet-passieve) netwerk een onafhankelijke stroom- of spanningsbron aan en bereken dan de corresponderende poortspanning resp. poortstroom. Bereken hieruit vervolgens de th evenin-impedantie.

Opmerking 3

De onder opmerking 2 genoemde methode om de th evenin-impedantie te bepalen biedt voor netwerken met bestuurd bronnen i.h.a. geen voordelen boven die waarbij Z_i volgt uit U_T/I_N .

Immers wij zullen nu toch steeds een berekening met maas- en knooppuntsmethode moeten uitvoeren. Het snel neerschrijven van Z_i kan alleen geschieden voor netwerken met onafhankelijke bronnen. Omdat dit voor netwerken met bestuurde bronnen zelden mogelijk is, is het raadzaam Z_i steeds te bepalen uit U_T en I_N .

9.4.5. Voorbeeld



De thévenin-spanning:

Uit $I = \frac{\mu U}{R_a + R_K}$ en $U_{32} = U - R_K I$ volgt:

$$I = \frac{\mu U}{R_a + (1 + \mu)R_K} \quad \text{zodat} \quad U_{20} = \frac{\mu R_K U}{R_a + (1 + \mu)R_K}.$$

De spanning U_{20} is de thévenin-spanning U_T .

De thévenin-impedantie:

1e methode.

Bij kortsluiten van de klemmen 2 en 0 geldt $I = \frac{\mu U}{R_a}$ (deze stroom is de nortonstroom). Met $Z_i = \frac{U_T}{I_N}$ volgt

$$Z_i = \frac{R_K R_a}{R_a + (1 + \mu)R_K}.$$

2e methode

Stel $U \equiv 0$. Sluit op de klemmen 2 en 0 een spanningsbron van b.v. 1 V aan (zie fig. 151).

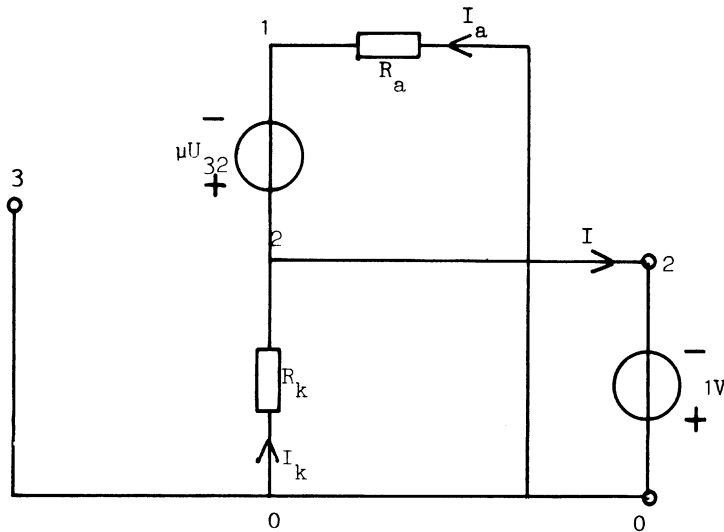


Fig.151

$$U_{32} = 1$$

$$\mu U_{32} = \mu$$

$$I_K = \frac{1}{R_K}$$

$$U_{01} = 1 + \mu \quad \text{zodat}$$

$$I_a = \frac{1 + \mu}{R_a}$$

$$\text{Met } I = I_a + I_K \text{ en } Z_{Th} = \frac{1}{I} \text{ volgt: } Z_{Th} = \frac{R_K R_a}{R_a + (1 + \mu) R_K}.$$

9.4.6. Zoals blijkt uit de hier gegeven voorbeelden vindt de oplossing van netwerkproblemen met bestuurd bronnen vaak op weinig systematische wijze plaats. Dit is een gevolg van het feit, dat het bij dergelijke netwerken meestal moeilijk is algemene rekenprocedures aan te geven. Wij beperken ons daarom tot eenvoudige gevallen waarbij het opschrijven van de spannings- en stroomrelaties en het toepassen van de wetten van Kirchhoff betrekkelijk gemakkelijk is.

Voor meer geavanceerde systematische procedures zij verwezen naar de colleges Elektrische Netwerken 2 en 3.

Immers wij zullen nu toch steeds een berekening met maas- en knooppuntsmethode moeten uitvoeren. Het snel neerschrijven van Z_i kan alleen geschieden voor netwerken met onafhankelijke bronnen. Omdat dit voor netwerken met bestuurde bronnen zelden mogelijk is, is het raadzaam Z_i steeds te bepalen uit U_T en I_N .

9.4.5. Voorbeeld

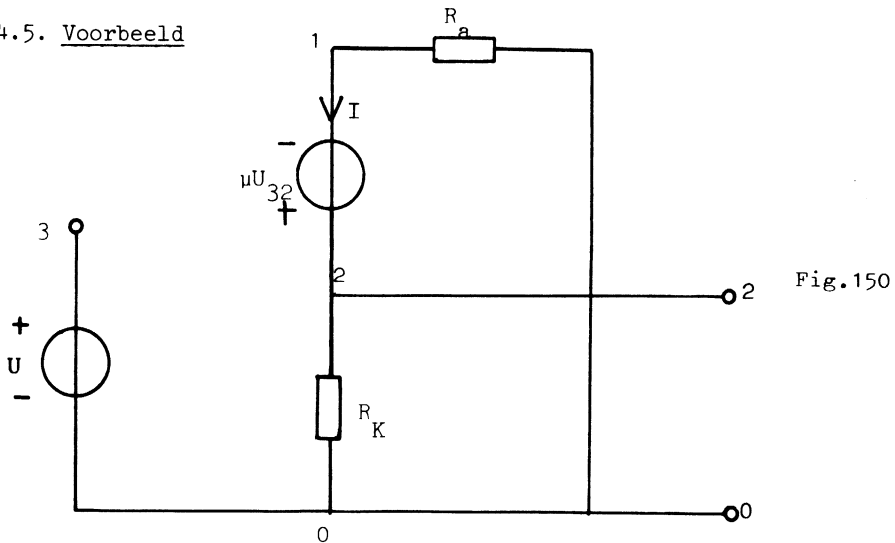


Fig. 150

De thévenin-spanning:

Uit $I = \frac{\mu U_{32}}{R_a + R_K}$ en $U_{32} = U - R_K I$ volgt:

$$I = \frac{\mu U}{R_a + (1 + \mu)R_K} \quad \text{zodat} \quad U_{20} = \frac{\mu R_K U}{R_a + (1 + \mu)R_K}.$$

De spanning U_{20} is de thévenin-spanning U_T .

De thévenin-impedantie:

1e methode.

Bij kortsluiten van de klemmen 2 en 0 geldt $I = \frac{\mu U}{R_a}$ (deze stroom is de nortonstroom). Met $Z_i = \frac{U_T}{I_N}$ volgt

$$Z_i = \frac{R_K R_a}{R_a + (1 + \mu)R_K}.$$

2e methode

Stel $U \equiv 0$. Sluit op de klemmen 2 en 0 een spanningsbron van b.v. 1 V aan (zie fig. 151).

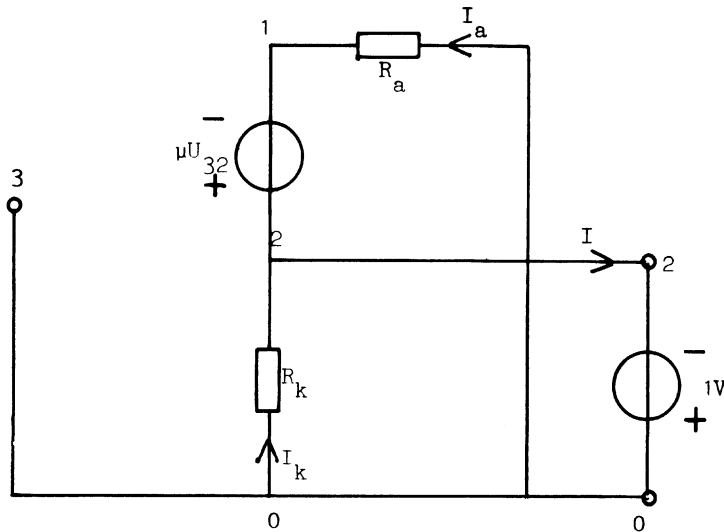


Fig.151

$$U_{32} = 1$$

$$\mu U_{32} = \mu$$

$$I_K = \frac{1}{R_K}$$

$$U_{01} = 1 + \mu \quad \text{zodat}$$

$$I_a = \frac{1 + \mu}{R_a}$$

$$\text{Met } I = I_a + I_K \text{ en } Z_{Th} = \frac{1}{I} \text{ volgt: } Z_{Th} = \frac{R_K R_a}{R_a + (1 + \mu) R_K}.$$

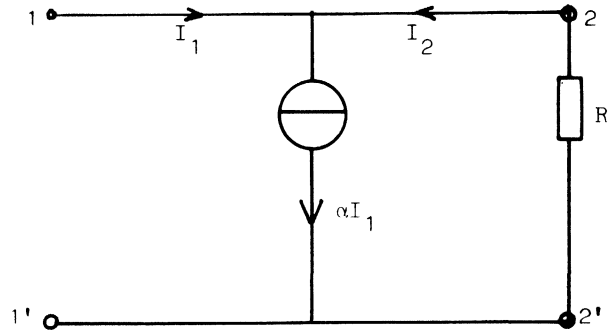
9.4.6. Zoals blijkt uit de hier gegeven voorbeelden vindt de oplossing van netwerkproblemen met bestuurde bronnen vaak op weinig systematische wijze plaats. Dit is een gevolg van het feit, dat het bij dergelijke netwerken meestal moeilijk is algemene rekenprocedures aan te geven. Wij beperken ons daarom tot eenvoudige gevallen waarbij het opschrijven van de spannings- en stroomrelaties en het toepassen van de wetten van Kirchhoff betrekkelijk gemakkelijk is.

Voor meer geavanceerde systematische procedures zij verwezen naar de colleges Elektrische Netwerken 2 en 3.

9.5. Enkele bijzondere schakelingen

9.5.1. Voor de schakeling van fig. 152 kan men schrijven $I_2 = (\alpha - 1)I_1$ en $U_{11'} = -RI_2$, zodat voor de aan poort 1 waargenomen weerstand geldt: $R_{11'} = -(\alpha - 1)R$.

Fig. 152



Indien $\alpha > 1$, is $R_{11'} < 0$. De negatieve weerstandswaarde hangt af van de waarde van α . Als $\alpha = 2$ gekozen wordt, heeft de aan poort 1 waargenomen impedantie het tegengestelde teken van de impedantie die op poort 2 is aangesloten; de moduli van beide impedanties zijn dan gelijk.

Conclusie: Met transactoren kunnen de elementen weerstand, spoel en condensator nu ook met negatieve waarden worden beschouwd.

De tweepoort van fig. 152 is een bijzonder geval van een tweepoortnetwerk dat negatieve immittantie convertor wordt genoemd (N.I.C.).

9.5.2. De negatieve immittantie convertor (N.I.C.)

Voor de schakeling van fig. 153 kan men schrijven:

$$U_1 = \mu U_2 \text{ en } I_1 = \frac{1}{\alpha} I_2.$$

De impedantie aan poort 1 gemeten is $-\mu\alpha Z$. Indien $\alpha = \frac{1}{\mu}$ heeft de schakeling dezelfde werking als de schakeling volgens fig. 152.

De tweepoort gezien aan de klemmen 1, 1' en 2, 2' heet negatieve immittantie convertor of N.I.C. Zie fig. 154, voor het geval $\alpha = \frac{1}{\mu}$,

zodat $U_1 = \mu U_2$ en

$$I_2 = \mu I_1.$$

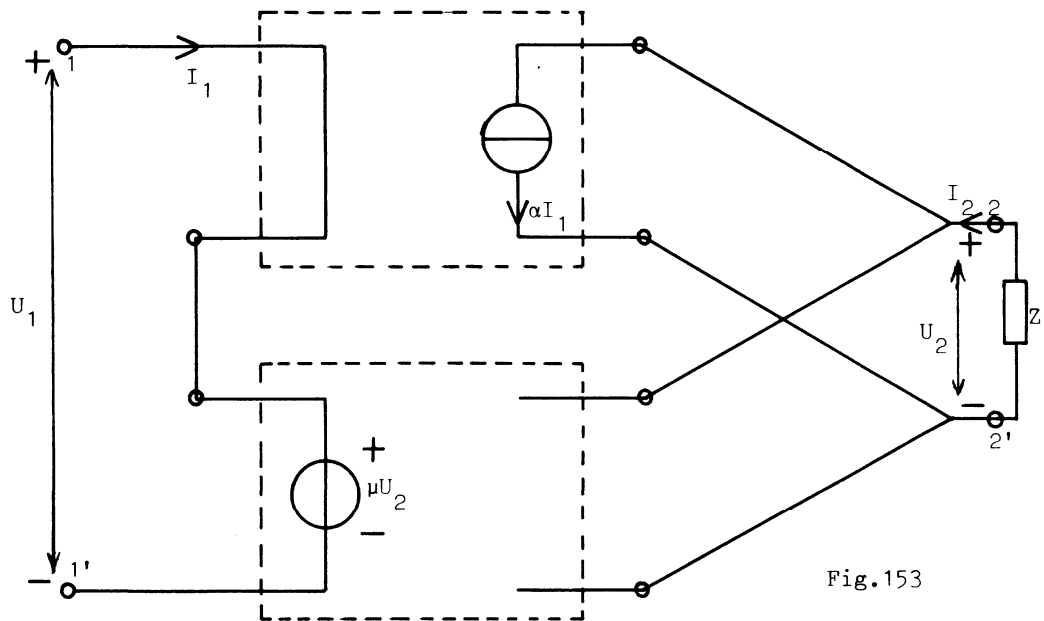


Fig.153

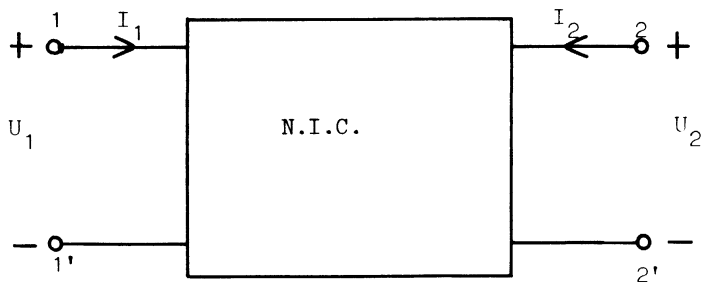


Fig.154

De immittantie-conversie vindt plaats doordat hier het teken van de stroom wordt omgekeerd. Wij spreken van een stroom-NIC als $\mu > 0$. Voor een spannings-NIC is $\mu < 0$.

Indien het teken van de spanning wordt omgekeerd hebben wij te maken met een spannings-NIC. Hierbij moet men wel bedenken dat het onderscheid tussen de twee soorten NIC's wel van de polariteit- en richting-afspraken van de poortgrootheden afhangt.

Opdracht: Bedenk een schema voor een spannings-NIC.

Opdracht: Breng in het schema van fig. 153 zodanige veranderingen aan, dat het netwerk tussen de poorten 1 en 2 zich gedraagt als een ideale transformator.

Opdracht: Ga na, dat het schema van fig. 152 een bijzonder geval is van het schema van fig. 153.

9.5.3. De negatieve immittantie-invertor (N.I.I.)

Voor de schakeling van fig. 155 kan men schrijven

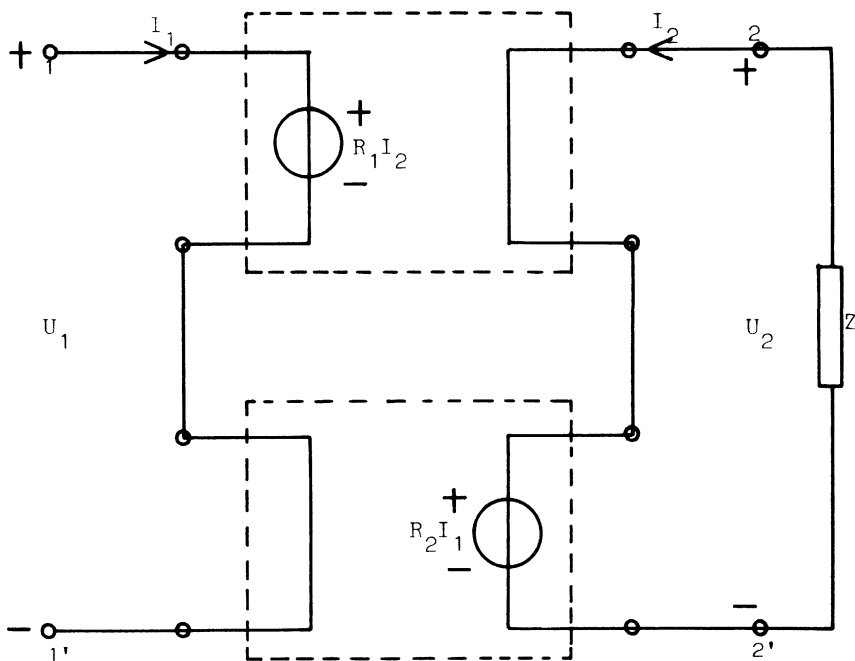


Fig.155

$$U_1 = R_1 I_2 \text{ en } U_2 = R_2 I_1.$$

De impedantie die men waarneemt aan poort 1 is $-\frac{R_1 R_2}{Z}$. Indien $R_1 R_2 = 1$ (b.v. $R_1 = R_2 = 1\Omega$) is de primair waargenomen impedantie de negatieve inverse van de secundaire impedantie.

Vraag: Zijn de NIC en de NII passieve tweepoorten? Zijn zij reciprook?

Opdracht: Verander het schema van fig.155 zodanig dat een positieve impedantie-inversie ontstaat.

Opdracht: Geef een schema van een NII aan dat uitsluitend bestuurd stroombronnen bevat.

9.6. De gyrator

9.6.1. Een bijzonder geval van de positieve impedantie-invertor ontstaat als men kiest $U_1 = -RI_2$ en $U_2 = RI_1$.

De constanten zijn dan reëel en gelijk. Een netwerk met deze eigenschappen noemt men een gyrator (Tellegen, 1948). De praktische en theoretische betekenis van de gyrator is zo groot dat men hiervoor een apart schema gebruikt, zie fig. 156.

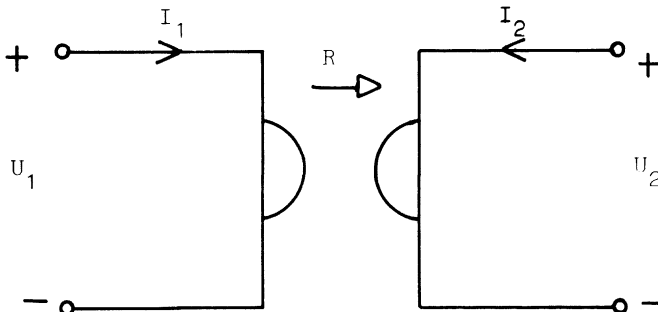


Fig.156

Merk op dat deze tweepoort gekarakteriseerd wordt door slechts één parameter nl. de gyratieweerstand R en dus kan worden opgevat als een nieuw netwerk-element.

9.6.2. Het schema van fig. 157 met bestuurde (actieve) stroombronnen is één van de mogelijkheden tot realisatie van de gyrator.

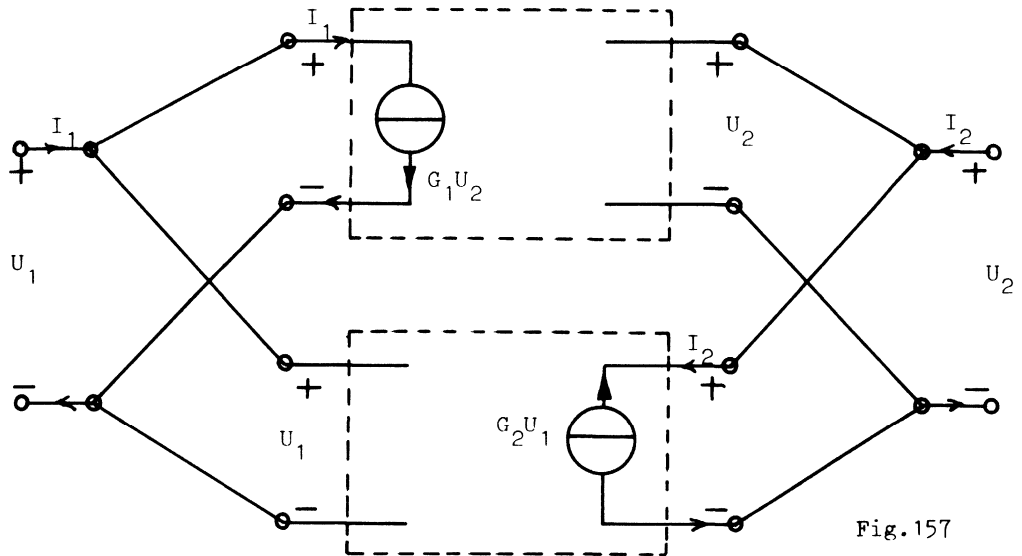


Fig. 157

Voor dit schema geldt: $I_1 = G_1 U_2$ en $I_2 = -G_2 U_1$, hetgeen de duale*) vorm is van de onder 9.6.1. gegeven vergelijkingen. Hier heet, als $G_1 = G_2 = G$, deze constante de gyratiegeleiding.

9.6.3. Indien een gyrator aan de secundaire zijde wordt afgesloten met een condensator C met impedantie $1/\lambda C$, neemt men aan de primaire kant waar een impedantie $Z(\lambda) = \lambda(R^2 C)$.

Deze impedantie is die van een spoel met een zelfinductie $L = R^2 C$ (Ga dit na). Het is in het bijzonder deze eigenschap van impedantie-transformatie die de gyrator voor de praktijk zo belangrijk maakt. Door middel van een gyrator kan men met een kleine goedkope condensator een dure, ruimte-eisende spoel nabootsen. Voor geïntegreerde schakelingen is dit perspectief zeer gunstig.

9.6.4. De gyrator is passief

Ondanks het feit, dat de gyrator hier werd gerealiseerd met actieve componenten is het een passief netwerk.

*) Wij bedoelen hier met duaal: I wordt U en U wordt I .

Immers

$$\begin{aligned} p_1(t) + p_2(t) &= u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t) \\ &= -Ri_2(t)i_1(t) + Ri_1(t)i_2(t) \\ &= 0 \text{ voor } \underline{\text{alle}} \ t. \end{aligned}$$

Uit deze identiteit volgt niet alleen dat de gyrator passief is, maar ook dat hij niet-energetisch is. In dit opzicht is hij te vergelijken met de ideale transformator die eveneens passief en niet-energetisch is.

9.6.5. De gyrator is niet-reciprook

De gyrator-vergelijkingen zijn:

$$U_1 = -RI_2$$

$$U_2 = RI_1$$

In het algemeen schrijft men: $U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Voor de gyrator geldt dus $Z_{11} = Z_{22} = 0$ en $Z_{12} \neq Z_{21}$. Dit laatste kenmerkt (zie 9.3.6 b) het niet-reciproke gedrag van de gyrator. In dit opzicht wijkt de gyrator af van de (reciproke) ideale transformator.

9.6.6. Bij het gebruik van de gyrator in netwerken moet men dezelfde oplettendheid in acht nemen als bij de ideale transformator. Bij deze laatste komt men in strijd met de spannings- of stroomwet van Kirchhoff, indien men beide poorten afsluit met spannings-resp. stroombronnen met willekeurig gekozen bronsterkten. Bij de gyrator doet dit-zelfde zich voor wanneer men op de ene poort een spanningsbron en op de andere poort een stroombron aansluit.

Historisch is de gyrator niet ontstaan als een bijzonder electrisch apparaat, maar als een abstracte entiteit waaraan behoefte bestond om de theorie te completeren. De eerste realisaties berustten op de werking van de lorentz-kracht op de electronen in de buitenste schillen van de elementen van groep VIII in het periodieke systeem.

Het optredende gyromagnetische effect is goed merkbaar bij frequenties in het gebied 1 - 10 GHz. Ook werden andere gyratoren gemaakt door een electrostatische en een electromagnetische transductor mechanisch aan elkaar te koppelen. Al deze realisaties van een gyrator - die weliswaar nog niet ideaal zijn - zijn in wezen passief, geheel in overeenstemming met de ware aard van dit element.

Op praktische gronden geeft men bij de huidige stand van de techniek (1971) de voorkeur aan electronische realisaties bij lage frequenties.

9.7. Lineaire netwerken

9.7.1. Reciproke netwerken

Wij hebben gezien in de hoofdstukken I tot en met VII, dat het mogelijk is de lineaire reciproke passieve netwerktheorie te funderen op de elementen weerstand, spoel, condensator en ideale transformator. Toevoeging van de spanningsbron en de stroombron maakt lineaire, reciproke actieve netwerktheorie mogelijk. Wij beschikken dan over zes elementen, waarvan de eigenschappen vastgelegd zijn met telkens één parameter.

9.7.2. Niet-reciproke netwerken

Het blijkt dat men voor het funderen van de lineaire niet-reciproke passieve netwerktheorie slechts één nieuw element behoeft te introduceren. Dit element is de gyrator. Zoals wij hebben gezien, is de gyrator passief en wordt hij gekenmerkt door slechts één parameter (de gyratiegeleiding G). Door toevoeging van de spannings- en stroombron kan men ook actieve schakelingen bestuderen. Het ligt in eerste instantie voor de hand te verwachten, dat men daartoe over zeven elementen moet beschikken, maar wij zagen al onder 9.6.3. dat met gebruikmaking van een gyrator, b.v. de spoel als netwerkelement overbodig wordt. Wij kunnen ook de condensator overbodig maken wanneer wij van een spoel uitgaan.

Verder gedraagt de secundaire zijde van een gyrator die primair is aangesloten op een spanningsbron zich als een stroombron, waarmee dit laatste element overbodig wordt.

Tenslotte gedragen twee achter elkaar geschakelde gyratoren met een gyratie-weerstand R_1 resp. R_2 zich als een ideale transformator met transformatieverhouding $n = R_2/R_1$, zodat nu ook de ideale transformator niet meer als element behoeft te worden beschouwd.

Opdracht: Leid de betrekking tussen n , R_1 en R_2 af.

Resumerend kunnen we zeggen dat de theorie dan kan worden gegrond op vier elementen, waarvoor b.v. gekozen kunnen worden

- a. de spanningsbron
- b. de weerstand ($R > 0$)
- c. de condensator
- d. de gyrator .

Met gebruik hiervan kunnen equivalente schakelingen gegeven worden voor die klasse netwerken, die in de hoofdstukken I tot en met VII werd bestudeerd en waarbij zes elementen werden gebruikt.

9.7.3. Bestuurde actieve elementen

Wij hebben kennis gemaakt met vier typen actieve lineaire transactoren, die elk gekarakteriseerd kunnen worden met slechts één parameter en dus in aanmerking komen als element te worden opgevat, indien men een theorie van lineaire actieve netwerken wil funderen.

De vier transactoren zijn evenwel niet onafhankelijk. Schakelt men de secundaire poort van een spannings-stroom-transactor aan de primaire poort van een stroom-spannings-transactor, dan ontstaat een spannings-spannings-transactor. Schakelt men op dezelfde wijze een U-I-transactor achter een I-U-transactor, dan krijgt men een I-I-transactor. Zo bezien zijn dus slechts de transactoren van fig.142 en 145 als elementair op te vatten. Indien men echter iedere poort van bv. een U-I-transactor aansluit op een gyrator, dan verkrijgt men de I-U-transactor.

Wij zien nu dat een keuze van combinaties van elementen mogelijk is. Wij kunnen bijvoorbeeld beslissen dat wij de gyrator, de U-I transactor, de spanningsbron, de weerstand en de condensator als basis-elementen zullen beschouwen en dan alle andere tot nu toe ingevoerde elementen hieruit construeren. Maar wij weten dat de gyrator kan worden verkregen (fig. 157) uit twee parallel geschakelde U-I transactoren, zodat het lijkt alsof wij slechts nodig hebben de spanningsbron, de U-I transactor, de weerstand en

de condensator om alle andere netwerkelementen te kunnen construeren. Op dit punt beland moeten wij echter oppassen. Het is namelijk zo, dat als wij de volledige schakeling van een I-U transactor tekenen, die moet worden gevormd uit een U-I transactor in combinatie met een uit U-I transactoren bestaande gyratorschakeling, blijkt dat de schakeling een stroombron bevat in serie met een open tak, alsmede een andere stroombron die een gelijke sterkte moet hebben als een uitwendige stroom. Zo'n schakeling is in strijd met de wetten van Kirchhoff en heeft derhalve theoretische noch praktische betekenis.

Dit voorbeeld toont aan dat zodra wij speciale netwerkelementen langs elektronische weg - m.b.v. actieve schakelingen - willen maken zich allerlei nieuwe problemen voordoen. Desondanks zijn het elektronische ontwerp en de realisatie van speciale netwerkelementen zeer boeiende activiteiten, die in de hogere jaars colleges en practica aan de orde komen.

In het college Elektrische Netwerken 3 zullen wij een ander actief netwerkelement behandelen, de z.g. nullor, waarmee het mogelijk zal zijn deze aspecten beter te begrijpen en in hun juiste verband met de elektronische praktijk te brengen. Het zal dan blijken, dat slechts vier elementen, n.l. de nullor, de weerstand, de condensator en de spanningsbron nodig zijn om ieder gewenst lineair netwerk op te bouwen. Voorlopig moeten wij ons tevreden stellen met de volgende bewering:

Resumerend uit het voorgaande kunnen wij stellen, dat de theorie van de lineaire actieve netwerken kan worden gegrond op de wetten van Kirchhoff en de vijf elementen:

- a. de spanningsbron
- b. de weerstand ($R > 0$)
- c. de condensator ($C > 0$)
- d. de gyrator
- e. de spannings-stroom-transactor

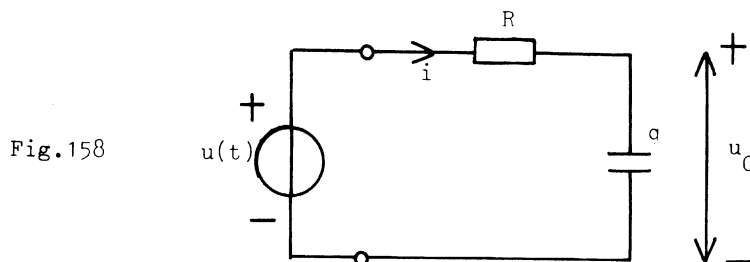
*) Noot bij blz. 246.

Er zijn ook verboden verbindingen analoog aan die, behandeld in paragraaf I.7.3. Het aansluiten van bv. een spanningsbron met willekeurige sterkte op de poorten 2 van de transactoren van fig. 144 resp. 145 is niet toegestaan. Poortspanning u_2 wordt bepaald door de sturende grootte u_1 of i_1 . Dit unilaterale karakter van de transactoren komt tot uitdrukking in het eenzijdige vermogenstransport.

10. VRIJE TRILLINGEN EN KOMPLEXE FREQUENTIES

10.1. Inleiding

De beschrijving van het gedrag van een netwerk geschiedt in eerste instantie met zogenaamde differentiaal-vergelijkingen. Een eenvoudig voorbeeld hiervan vinden wij aan de hand van figuur 158.



De spanningswet van Kirchhoff geeft hier

$$u(t) = Ri + u_C.$$

Indien wij beide leden van deze vergelijking éénmaal differentiëren volgt

$$\frac{du(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} . \quad (1)$$

Indien $u(t)$ bekend is, hebben wij hier een vergelijking in $i(t)$; omdat in deze vergelijking differentiaalquotienten voorkomen, spreekt men van een differentiaalvergelijking. De hoogst voorkomende afgeleide bepaalt de zgn. orde van de lineaire differentiaalvergelijking. Hier is de d.v. van de eerste orde. Men spreekt in dit verband wel van een eerste-orde-netwerk.

Er bestaan methoden om dergelijke vergelijkingen op te lossen. Voor sinusvormige veranderlijken hebben wij in hoofdstuk 4 oplossingen gegeven waarbij een dergelijke differentiaalvergelijking in het tijdsdomein (alle u en i zijn functies van de tijd) eerst werd getransformeerd in een algebraïsche vergelijking, met complexe coëfficiënten, in een frequentie-domein, en dat vervolgens de oplossing vanuit het complexe gebied weer werd terug getransformeerd naar het tijdgebied. Het is duidelijk dat deze oplosmethode alleen kan worden toegepast voor signalen, die sinusfuncties of exponentiële functies van de tijd zijn.

De oplossing voor de gevonden differentiaalvergelijking wordt mede bepaald door $u(t)$. Wij zullen nu eerst het gedrag van het netwerk onderzoeken als $u(t) \equiv 0$. De differentiaalvergelijking wordt dan:

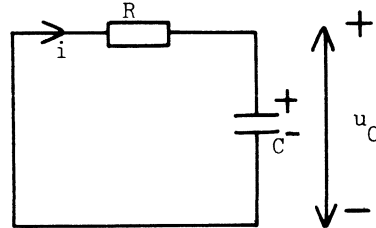
$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0. \quad (2)$$

Een dergelijke vergelijking, waarbij de excitatie $u(t) \equiv 0$, noemt men een homogene differentiaalvergelijking. Uit de theorie van de d.v. blijkt dat voor het oplossen van onze oorspronkelijke vergelijking de oplossing van deze homogene vergelijking van grote betekenis is.

Het is duidelijk, dat aan vergelijking (2) voldaan wordt door $i \equiv 0$.

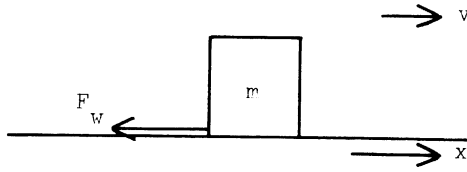
Deze oplossing is triviaal en wij interesseren ons ook voor niet-triviale oplossingen. Wij kunnen ons voorstellen dat bij een bronsterkte $u = 0$ (zie schema 159) toch stroom in het netwerk kan vloeien, nl. als de condensator op het moment dat wij het netwerk beschouwen, lading bevat.

Fig.159



De condensator zal zich ontladen over de weerstand. Men zegt dat het netwerk dat, met alle bronsterkten nulgesteld, en dat verder niet van buiten beïnvloed wordt, vrije trillingen vertoont. Dit in tegenstelling tot het netwerk van fig.158, waar de spanningsbron $u \neq 0$ het netwerk een responsie opwekt, de zgn. gedwongen trilling. Wij kunnen het netwerk van fig.159 vergelijken met een massa m , die vrij over een ruwe tafel glijdt zonder dat daarop andere krachten dan de wrijving F_w werken. Zie fig.160.

Fig.160



Wij veronderstellen de wrijving evenredig met de snelheid v ; dan geldt

$$F_w = -k v.$$

met $F = m a$ of $F = m \frac{dv}{dt}$ volgt

$$m \frac{dv}{dt} + kv = 0. \quad (3)$$

Wij krijgen hier een vergelijking van hetzelfde type als (2). Evenzo als de condensator zijn elektrische energie $\frac{1}{2}Cu^2$ verliest, zal de bewegende massa haar kinetische energie $\frac{1}{2}mv^2$ verliezen.

Een ander mechanisch voorbeeld is een schommel of een snaar die men een uitwijking geeft (een beginenergie geeft) en die men verder aan zijn lot overlaat, en waaraan verder geen energie van buiten meer wordt toegevoerd. De beweging van de schommel of snaar onder deze omstandigheden noemen wij dan een vrije trilling.

Net zo zullen wij spreken van een vrije elektrische trilling in het schema van fig.159. Het is duidelijk dat de vrije trilling bepaald wordt door de elektrische beginenergie op de condensator en de eigenschappen van het netwerk, op dezelfde manier als dat in fig.160 het geval is met de (kinetische) beginenergie van de massa en de mechanische eigenschappen van het systeem.

De vrije trillingen vindt men door het beschouwen van de homogene differentiaalvergelijking. Alle voor het netwerk karakteristieke eigenschappen zijn in deze homogene d.v. begrepen. Alle voor de bronnen kenmerkende eigenschappen zijn buiten beschouwing gelaten; alle bronsterkten zijn nul gesteld. D.w.z. onafhankelijke spanningsbronnen zijn vervangen door kortsluitdraden en onafhankelijke stroombronnen zijn vervangen door open takken. Evenals bij de beschouwingen van § 9.4. blijven de bestuurde bronnen ongewijzigd.

10.2. Oplossing

Het oplossen van de homogene vergelijking

$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$ kan als volgt geschieden, door scheiding der variabelen.

$$\int \frac{di}{i} = - \int \frac{dt}{RC}.$$

$$\ln i = - \frac{t}{RC} + \text{konst.} \quad \text{zodat}$$

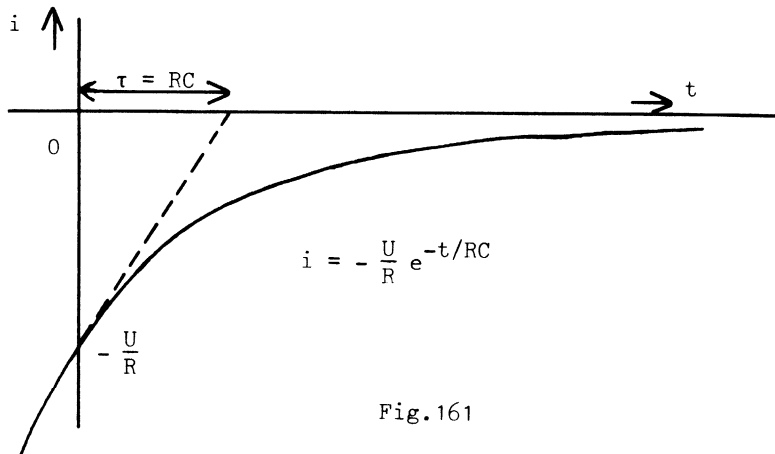
de vrije trilling wordt beschreven door:

$$(4) i = Ae^{-t/RC}, \text{ waarin } A \text{ een nog te bepalen integratie-constante is.}$$

Zoals uit het voorgaande blijkt is er alleen sprake van een (niet nulzijnde) vrije trilling als de condensator (zie fig.159) lading bevat. Veronderstellen wij nu, dat op het tijdstip $t = 0$, $u_C(0) = U$, dan zal de stroom i op dat tijdstip $i(0) = -\frac{U}{R}$ zijn. Men noemt dit een beginvoorwaarde. Indien vergelijking (4) het gedrag van i beschrijft, moet daaraan ook voldaan zijn voor $t = 0$, zodat daarmee volgt

$$A = -\frac{U}{R} \text{ en } i = -\frac{U}{R} e^{-t/RC}.$$

Dit is de oplossing van de homogene d.v. in i en geeft de vrije trillingen weer. Deze is geschetst in fig. 161.



De t -as wordt, door de raaklijn aan de karakteristiek in het punt $t = 0$, gesneden in het punt $t = \tau$, welk gelijk is aan RC .

$$\left\{ \frac{di(t)}{dt} \right\}_{t=0} = \frac{U}{R^2 C} \quad \text{en} \quad \left\{ \frac{di(t)}{dt} \right\}_{t=0} = \frac{U/R}{\tau} \Rightarrow \tau = RC.$$

Opgave: Toon aan dat de dimensie van τ die van tijd is.

Opmerking: Men noemt τ wel de tijdsconstante van het circuit; τ is een maat voor de snelheid waarmee de vrije trilling uitsterft.

In τ s sterft het verschijnsel uit tot $\frac{1}{e}$ x de oorspronkelijke waarde op $t = 0$.

N.B. Wij merken nogmaals met nadruk op, dat het hier slechts de oplossing van de homogene vergelijking betreft.

In Elektrische Netwerken II zullen wij de algemene oplossing van de niet-homogene vergelijking geven.

10.3. Een andere oplossingsmethode

Lineaire differentiaalvergelijkingen

zijn vergelijkingen waarin wèl termen met $\frac{d^n x}{dt^n}$, dus tot de eerste macht,

voorkomen maar geen functies van die differentiaalquotiënten of van x zoals

$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2$ of $\ln \left(\frac{dx}{dt} \right)$ of $x \frac{dx}{dt}$, verschijnen. Als de coëfficiënten van deze afgeleiden onafhankelijk van t zijn, heten de d.v. lineair met constante coëfficiënten.

Voor lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten heeft Euler gesteld dat zij exponentiële oplossingen hebben, oplossingen dus van het type $Ae^{\lambda t}$. Wij maakten hiervan reeds gebruik in hoofdstuk IV. De homogene vergelijking

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0 \quad \text{is een lineaire d.v. met constante coëfficiënten.}$$

Substitueren wij $i = Ae^{\lambda t}$ dan vinden wij

$$\frac{d Ae^{\lambda t}}{dt} + \frac{Ae^{\lambda t}}{RC} = 0, \quad \text{of}$$

$$\lambda Ae^{\lambda t} + \frac{1}{RC} Ae^{\lambda t} = 0, \quad \text{zodat voor } Ae^{\lambda t} \neq 0 \text{ of } i \neq 0 \text{ volgt,}$$

$$\lambda + \frac{1}{RC} = 0.$$

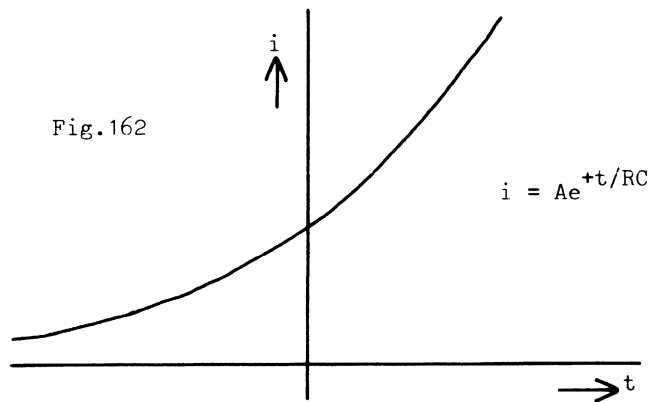
Deze vergelijking die de karakteristieke vergelijking van de d.v. heet, bepaalt de exponent van de exponentiële functie. Met $\lambda = -\frac{1}{RC}$ volgt

$$i = Ae^{-t/RC}.$$

Voor de bepaling van de integratie-constante A volgt men dezelfde procedure als hiervoor. De karakteristieke vergelijking is van de eerste graad omdat wij hier een netwerk van de eerste orde analyseren.

10.4. Uitbreiding van het frequentie-begrip

- De grootheid $\lambda = -\frac{1}{RC}$ was in ons voorbeeld een reëel negatief getal en gaf aanleiding tot een uitstervend verschijnsel volgens fig. 161.
- Indien de wortel van de karakteristieke vergelijking reëel en positief was geweest, hadden wij een onbeperkt toenemend verschijnsel gekregen als in fig. 162.



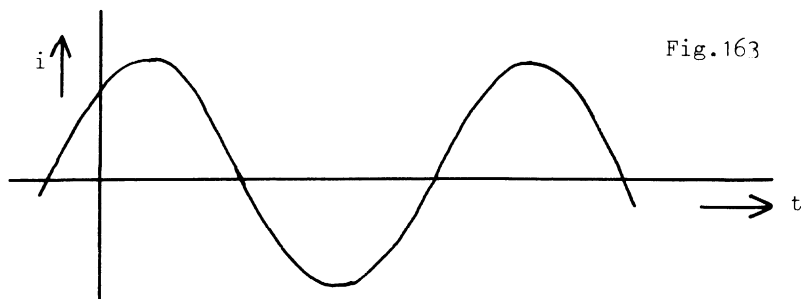
- Een karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

heeft imaginaire wortels en leidt tot vrije trillingen, gevormd door combinaties van termen van het type $Ae^{-j\omega t}$ en $Be^{+j\omega t}$.

Met de stelling van Euler:

$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$ volgt, dat wij sinusvormige oplossingen zullen vinden (zie fig.163).



De grootheid ω in een term $Ae^{j\omega t}$ hebben wij de hoekfrequentie genoemd. Wij zouden de grootheid $j\omega$ een "imaginaire" frequentie kunnen noemen. Een grootheid als onder 10.4.a. $\lambda = \frac{1}{RC}$ zouden wij dan een reële frequentie kunnen noemen. Maar het is beter beide op te vatten als bijzondere gevallen van een zgn. komplexe frequentie.

d. De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

heeft de toegevoegd komplexe wortels

$$\lambda_1 = -1+j$$

$$\lambda_2 = -1-j.$$

Wij zien hier λ komplexe waarden aannemen en in verband met wat hiervoor gezegd is, zullen wij deze grootheid een komplexe frequentie noemen. De onder a, b en c genoemde reële en imaginaire grootheden zijn dan op te vatten als bijzondere gevallen van het algemenere begrip komplexe frequentie.

Wat moeten wij ons voorstellen bij een frequentie als bv. $\lambda_1 = -1+j$? Volgens de methode van Euler om differentiaalvergelijkingen op te lossen zijn er termen als $Ae^{(-1+j)t}$ in de oplossing aanwezig. In fig.164 is getekend $f(t) = \text{Re}\{Ae^{(-1+j)t}\}$.

Een komplexe frequentie $\lambda = -1+j$ gaat dus gepaard met een exponentieel uitstervende trilling. Wij komen dit in de praktijk tegen bij een snaar, die als hij is aangeslagen vrij uittrilt. Ook het voorbeeld van de schommel, die men na deze een uitwijking te hebben gegeven, aan zijn lot overlaat, kan men beschrijven met een dergelijke komplexe frequentie.

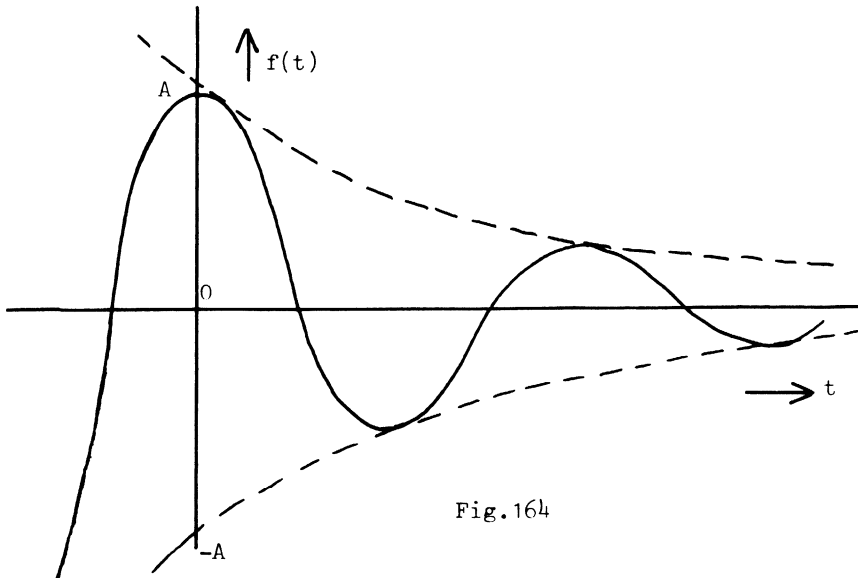


Fig.164

Het is duidelijk dat wij hier te maken hebben met een gedempt verschijnsel, omdat $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Als $\text{Re}(\lambda) = 0$ is het verschijnsel ongedempt (zie sub 10.4c).

Indien $\text{Re}(\lambda) > 0$ zullen wij te maken hebben met een exponentieel toenemend signaal.

De complexe frequentie λ zullen wij schrijven als

$$\lambda = \sigma + j\omega.$$

$\sigma = \text{Re}(\lambda)$ noemt men de dempingsterm

$\omega = \text{Im}(\lambda)$ noemt men de (reële) hoekfrequentie.

Conclusies

Bij de studie voor het gedrag van netwerken nemen de vrije trillingen een belangrijke plaats in; daarmee samenhangend komt het begrip karacteristieke vergelijking naar voren en naar aanleiding daarvan ontstond de behoefte aan het invoeren van een komplexe frequentie.

10.5. Uitbreiding van het begrip impedantie

Een reële stroom $i(t) = |I|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ kan worden opgevat als de superpositie van de complexe stromen

$$\frac{1}{2} I e^{\lambda t} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2} I^* e^{\lambda^* t} \quad \text{met} \quad \lambda = \sigma + j\omega.$$

$$\text{Dus} \quad i(t) = \frac{1}{2} (I e^{\lambda t} + I^* e^{\lambda^* t}).$$

Een dergelijke vorm is uiteraard ook voor een spanning

$$u(t) = |U| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \text{ te geven.}$$

Als alle stromen en spanningen in een netwerk van exponentiële vorm zijn, dan gelden evenals in hoofdstuk 4 de wetten van Kirchhoff voor de complexe (en constante) stromen I en U .

$$\text{Dus} \quad \sum_{k=1}^n I_k e^{\lambda t} \equiv 0 \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^m U_k e^{\lambda t} \equiv 0,$$

$$\text{impliceren} \quad \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^m U_k = 0.$$

De begrippen impedantie en admittantie blijven geldig daar:

$$\text{a.} \quad U_R e^{\lambda t} = R I_R e^{\lambda t} \Rightarrow U = R I.$$

$$\text{b.} \quad U_L e^{\lambda t} = L \frac{d(I_L e^{\lambda t})}{dt}$$

$$= \lambda L I_L e^{\lambda t} \Rightarrow U_L = \lambda L I_L \quad \text{en} \quad Z_L(\lambda) = \lambda L.$$

$$\text{c.} \quad \text{evenzo volgt} \quad U_C = \frac{I_C}{\lambda C} \quad \text{en} \quad Z_C(\lambda) = \frac{1}{\lambda C}.$$

d. voor de gekoppelde spoelen gelden dan de vergelijkingen

$$U_1 = \lambda L_1 I_1 + \lambda M I_2$$

$$U_2 = \lambda M I_1 + \lambda L_2 I_2.$$

$$\text{Steeds geldt} \quad U = Z(\lambda) I \quad \text{en} \quad I = Y(\lambda) U.$$

Omdat de grootheden R , L , C en M reëel zijn, geldt

$$Z(\lambda^*) = \{Z(\lambda)\}^*.$$

Uit het superpositie beginsel volgt dat, indien alle stromen en spanningen in een netwerk reëel zijn en van de vorm $|A| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$, het verband tussen spanning en stroom wordt gegeven door vergelijkingen van de vorm

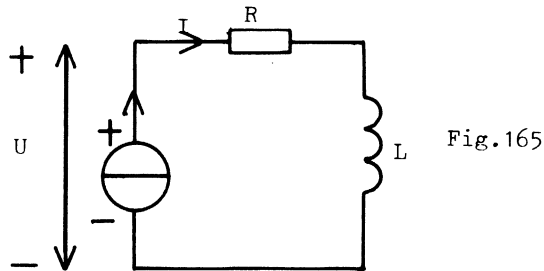
$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{2} (Z I e^{\lambda t} + Z^* I^* e^{\lambda^* t}) \\
 &= \operatorname{Re}(Z I e^{\lambda t}) = e^{\sigma t} |Z I| \cos(\omega t + \phi + \theta)
 \end{aligned}$$

waarin $\phi = \arg\{I\}$ en
 $\theta = \arg\{Z\}$.

Wij zien dat het begrip impedantie $Z(j\omega)$ dat wij steeds gehanteerd hebben is uit te breiden tot een begrip impedantie $Z(\lambda)$.

$Z(j\omega)$ wordt aldus gezien als een bijzonder geval van $Z(\lambda)$. Deze complexe rekenwijze is geheel isomorf aan die welke wij vroeger hebben gebruikt.

Voorbeeld:



gegeven $i(t) = \operatorname{Re}(I e^{\lambda t})$.

gevraagd: $u(t)$.

oplossing

$$\begin{aligned}
 U &= (R + \lambda L) I \\
 u(t) &= \operatorname{Re}\{(R + \lambda L) I e^{\lambda t}\} \\
 &= \operatorname{Re}\{(R + \sigma L + j\omega L) |I| e^{j\phi} e^{\sigma t} + j\omega t\}, \text{ waarin } \phi = \arg(I). \\
 &= |I| e^{\sigma t} \operatorname{Re}\{(R + \sigma L) + j\omega L\} e^{j(\omega t + \phi)} \\
 u(t) &= |I| e^{\sigma t} \sqrt{(R + \sigma L)^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \phi + \theta) \\
 &\quad \text{met } \theta = \arctan \frac{\omega L}{R + \sigma L}.
 \end{aligned}$$

Men ziet dat wij hier volgens dezelfde procedure te werk gaan als vroeger, maar dat de berekening wat gecompliceerder wordt door de invoering van σ .

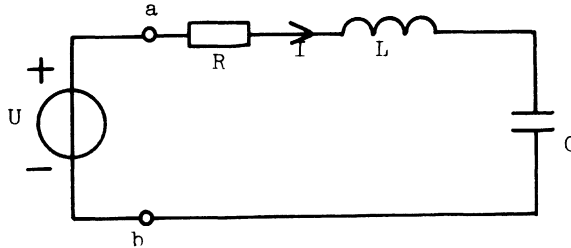
10.6. Impedantie, admittantie en vrije trillingen.

Fig.166

10.6.1. Wij veronderstellen dat de spanningsbron in fig.166 een bronsterkte heeft die een exponentiële functie van de tijd is.

Wij kunnen dan voor I schrijven:

$$I = Y(\lambda) U$$

$$I = \frac{\lambda C}{\lambda^2 LC + \lambda RC + 1} U.$$

Men noemt de coëff. van U (hier een admittantie) een netwerkfunctie. Indien wij de in dit netwerk mogelijke vrije trillingen willen onderzoeken betekent dit dat wij de bronsterkte $U = 0$ moeten stellen. Indien bij bronsterkte nul, niet nul-zijnde stromen aanwezig zijn, kan dit alleen als de noemer van $Y(\lambda)$ nul is. Alleen voor die waarden van λ die voldoen aan

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 LC + \lambda RC + 1 = 0$$

kunnen vrije trillingen bestaan. De noemer van $Y(\lambda)$ geeft hier de karakteristieke vergelijking van de vrije trillingen in dit netwerk. Immers, is $\frac{(\lambda^2 LC + \lambda RC + 1)}{\lambda C} I = U$, dan geldt als $U = 0$ terwijl $I \neq 0$, dat

$P(\lambda) = 0$. Men noemt $P(\lambda)$ de karakteristieke polynoom.

Wij zien, dat de karakteristieke vergelijking van de tweede graad is.

Wij hebben hier dus te maken met een tweede-orde-netwerk. Dit wordt ook duidelijk door het netwerk van fig.166 te beschouwen; wij zien dat onafhankelijk van elkaar de elektrische veldenergie van de condensator

$W_C = \frac{1}{2} C |U_C|^2$ en de magnetische veldenergie van de spoel $W_L = \frac{1}{2} L |I_L|^2$

kunnen worden gekozen.

Uit de karakteristieke vergelijking volgt dat er twee mogelijke waarden voor λ zijn (λ_1 en λ_2 met $\lambda_1 = \lambda_2^*$); wegens

het superpositie beginsel is de stroom van de vorm $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$. Hierin zijn A en B nog te bepalen en om deze te bepalen moeten twee andere gegevens beschikbaar zijn; hiervoor kan men b.v. kiezen de waarden van de magnetische en elektrische energieën op het tijdstip $t = 0$.

10.6.2. Indien in fig.166 op de klemmen a en b een stroombron aangesloten was geweest, hadden wij in overeenstemming met 10.6.1. kunnen schrijven $U = Z(\lambda) I$ of

$$U = \frac{(\lambda^2 LC + \lambda RC + 1)}{\lambda C} I .$$

Anders geschreven: $\lambda CU = (\lambda^2 LC + \lambda RC + 1)I$.

De vrije trillingen treden op als $I = 0$, is terwijl $U \neq 0$. Dit kan alleen als λC nul is, d.w.z. de noemer van $Z(\lambda) = 0$ is.

Voor die waarden van λ , die voldoen aan

$$\lambda C = 0,$$

kunnen vrije trillingen bestaan. De noemer van $Z(\lambda)$ geeft voor dit geval de karakteristieke vergelijking.

Wij zien dat

- a. de karakteristieke vergelijking nu een andere is dan eerst. Dit is uiteraard een gevolg van het feit dat we een ander netwerk onderzoeken.
- b. de graad van de karakteristieke vergelijking één is. Wij hebben nu dus te maken met een eerste orde netwerk. Hoewel dit aanvankelijk vreemd lijkt (wij hebben immers een L en een C en we zouden dus twee beginvoorwaarden verwachten) is het toch duidelijk dat wij in dit geval de stroom door de spoel niet meer vrij kunnen kiezen omdat deze bepaald wordt door de bronstroom. Wij kunnen alleen de condensatorenergie vrij kiezen. Daarom is het netwerk van de eerste orde.

10.6.3. Uit deze beschouwingen blijkt dat de vrije trillingen bepaald worden door de teller en de noemer van de functie

$$\frac{U}{I} = Z(\lambda) \quad \text{of} \quad \frac{I}{U} = Y(\lambda) .$$

De frequenties van de vrije trillingen noemt men de eigenfrequenties van

het netwerk. Wij zullen de betekenis van $Z(\lambda)$ aan de hand van enkele voorbeelden nader toelichten.

10.6.4. In hoofdstuk V analyseerden wij zuiver reactieve netwerken zoals in fig.167.

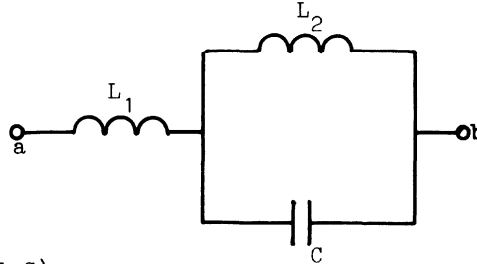


Fig.167

$$Z_{ab}(\lambda) = \frac{\lambda(L_1 + L_2 + \lambda^2 L_1 L_2 C)}{1 + \lambda^2 L_2 C}$$

$$Z_{ab} \text{ wordt nul voor } \lambda_1 = 0 = j\omega_1$$

$$\text{en voor } \lambda_2 = j\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = j\omega_2$$

$$\text{en voor } \lambda_3 = -j\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = j\omega_3$$

$$Z_{ab} = \infty \quad \text{voor } \lambda_4 = j\frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = j\omega_4$$

$$\text{en } \lambda_5 = -j\frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = j\omega_5$$

$$\lambda_6 = \infty = j\omega_6.$$

Wij zeggen dat λ_1 , λ_2 en λ_3 de nulpunten van $Z_{ab}(\lambda)$ zijn terwijl λ_4 , λ_5 en λ_6 de polen van $Z_{ab}(\lambda)$ zijn.

In het genoemde hoofdstuk besteedden wij alleen aandacht aan die hoekfrequenties, die voldeden aan $\omega \geq 0$, dus aan ω_1 , ω_2 en ω_4 en ω_6 .

Op grond hiervan konden wij met gebruikmaking van het theorema van Foster fig.168 geven.

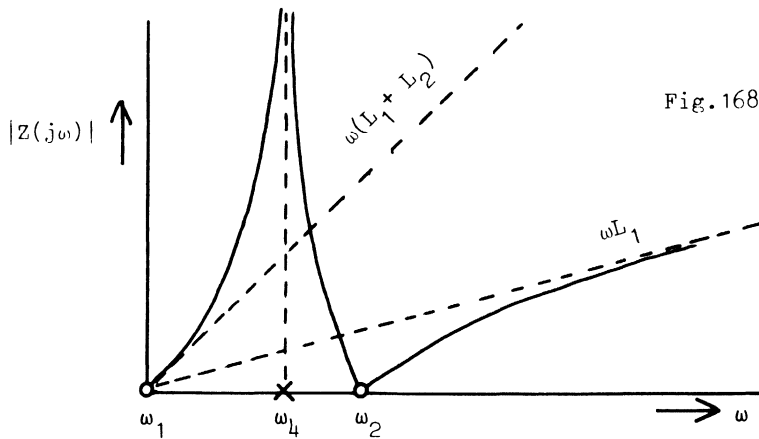


Fig. 168

De nulpunten worden aangegeven met 0, de polen met x. De polen van Z_{ab} zijn de frequenties van de vrije trillingen (eigenfrequenties) van het netwerk dat getekend is in fig. 167 dus met open klemmen a en b.

De nulpunten van Z_{ab} (de polen van Y_{ab}) zijn de eigenfrequenties van het netwerk dat bestaat als in fig. 167 de klemmen a en b worden kortgesloten. (Ga deze beide uitspraken na aan de hand van 10.6.1. en 10.6.2.).

Het is duidelijk dat de polen en nulpunten van $Z_{ab}(\lambda)$ bepalend zijn voor het gedrag van het netwerk. Met gebruik maken van het theorema van Foster kon voor dergelijke reactieve schakelingen de reactantie als functie van ω worden geschetst, zodra de ligging van de polen en de nulpunten bekend was. Het ligt nu voor de hand het onderzoek naar de betekenis van de polen en nulpunten uit te breiden naar niet zuiver reactieve schakelingen. Daarbij zullen wij gebruik maken van het zgn. komplexe frequentievlak, waarin de polen en de nulpunten van de te onderzoeken functie worden afgebeeld.

Voor het netwerk van fig. 167 vonden wij de polen en nulpunten van $Z_{ab}(\lambda)$.

In fig. 169 zijn deze afgebeeld in het complexe frequentievlak.

In dit geval liggen de polen en de nulpunten alle op de imaginaire as omdat wij hier een schakeling zonder demping ($\sigma = 0$) hebben.

Voor het geval van fig. 158 is

$$Z(\lambda) = \frac{\lambda RC + 1}{\lambda C} .$$

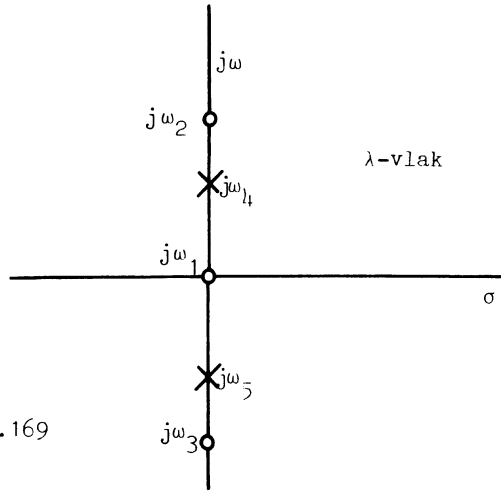


Fig.169

Het corresponderende beeld in het λ -vlak geeft fig.170.

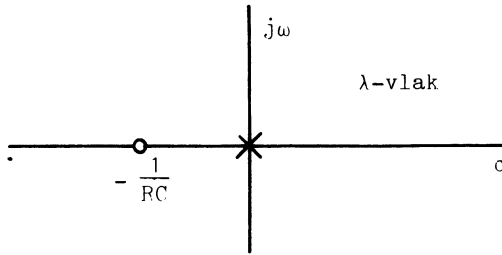


Fig.170

Voor $Y(\lambda)$ vinden wij het beeld in fig.171.

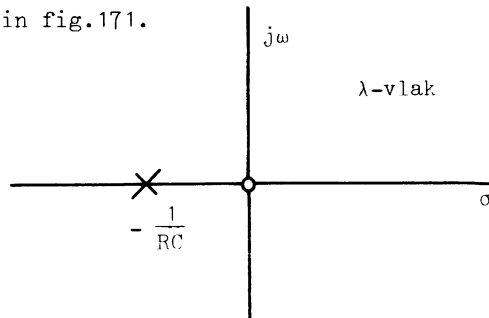
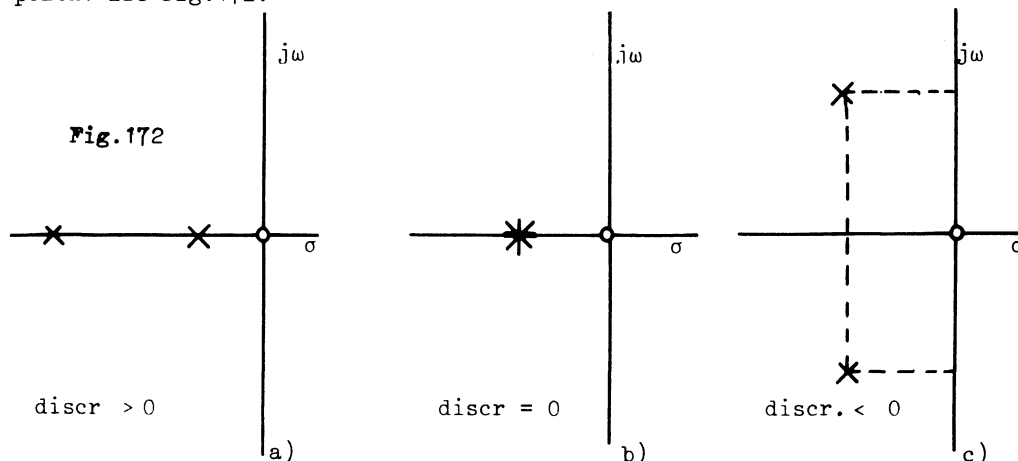


Fig.171

De pool van $Y(\lambda)$ bepaalt de frequentie van de eigentrilling van het netwerk bij kortgesloten klemmen.

Als wij tenslotte het beeld van $Y(\lambda)$ onderzoeken voor de schakeling van fig.166 dan is het duidelijk dat er twee polen zijn; afhankelijk ervan

of $R^2C^2 - 4LC$ groter, gelijk of kleiner is dan nul, zullen wij vinden reële en verschillende polen, reële samenvallende polen of toegevoegd complexe polen. Zie fig. 172.



Wij zullen deze drie gevallen in § 10.7. nader onderzoeken.

Er vallen enkele opmerkingen te maken:

- a. Alle polen en nulpunten liggen in het linker-halfvlak of op de imaginaire as ($\sigma \leq 0$).

Dit is een gevolg van het feit dat wij met passieve schakelingen te maken hebben, waar vrije trillingen uitdempen. Bij zuiver reactieve schakelingen blijft de vrije trilling bestaan.

Dit is een grensgeval. Voor $\sigma > 0$ krijgen wij signalen die met de tijd in sterkte toenemen en die alleen in actieve schakelingen (met bv. transistoren) kunnen optreden.

- b. Het polen en nulpuntenbeeld is symmetrisch t.o.v. de reële as.

Dit zal steeds zo blijven. Het is een gevolg van het feit dat alle elementwaarden reëel zijn. (Ga dit na).

10.7. Vrije trillingen in een tweede-orde systeem.

10.7.1. In hoofdstuk VI bezagen wij al een tweede-orde systeem. Wij zullen nu het netwerk van fig.173a nader onderzoeken,

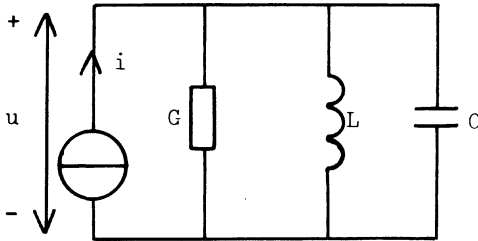


fig.173a

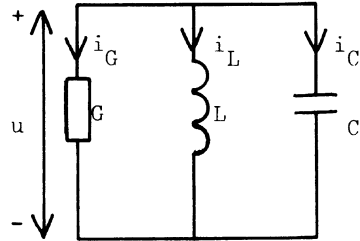


fig.173b

en ons beperken tot de vrije trillingen daarvan, d.w.z. wij stellen de bronsterkte = 0 en krijgen zodoende fig.173b.

Hierin is de condensatorlading vrij te kiezen en onafhankelijk daarvan de spoelstroom. Twee energieën zijn onafhankelijk van elkaar te kiezen. Immers als U_C een vaste waarde op een bepaald tijdstip wordt toegewezen, dan ligt weliswaar $\frac{di_L}{dt}$ op dat moment vast, maar i_L zelf op dat tijdstip is dan nog niet $\frac{di_L}{dt}$ bepaald. Deze kan dus onafhankelijk van u worden gekozen.

$$i_C = C \frac{du}{dt}, \quad i_G = Gu \quad \text{en} \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u}{L};$$

met $i_C + i_G + i_L = 0$ volgt

$$C \frac{d^2u}{dt^2} + G \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0.$$

Wij onderzoeken onder welke voorwaarden een exponentiële oplossing mogelijk is. Stel $u = Ue^{\lambda t}$,

dan is $(C\lambda^2 + G\lambda + \frac{1}{L}) Ue^{\lambda t} = 0$ voor alle t .

De karakteristieke vergelijking is

$$C\lambda^2 + G\lambda + \frac{1}{L} = 0.$$

De wortels daarvan zijn $\lambda_{1,2} = \frac{-G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$.

Er zijn twee exponentiële oplossingen mogelijk nl.

$$\frac{1}{2} U_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2} U_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Als gevolg van de superpositie is ook mogelijk

$$u(t) = \frac{1}{2} (U_1 e^{\lambda_1 t} + U_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Hierin moeten U_1 en U_2 nog worden bepaald. Dit is mogelijk, omdat wij twee beginvoorwaarden hebben, nl. $u_C(0)$ en $i_L(0)$ als wij bv. op het tijdstip $t = 0$ de energieverdeling in het netwerk kennen. Er zijn twee beginvoorwaarden nodig, omdat de karakteristieke polynoom van de tweede graad is.

Bij de oplossing van dit vraagstuk, doen zich verschillende gevallen voor afhankelijk van de waarde van de discriminant

$$D = \left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}, \quad \text{nl. } D > 0, \quad D = 0 \quad \text{en} \quad D < 0.$$

10.7.2. Het geval $D > 0$; het aperiodische geval.

De oplossing van $u(t)$ bestaat uit de som van twee exponentiële functies met reële exponenten.

$$u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

De beginvoorwaarde $u(0) = u_C(0)$ op $t = 0$ geeft

$$A_1 + A_2 = u_C(0). \quad (1)$$

Voor de spoelstroom kan worden geschreven $i_L = -(i_C + i_G)$ zodat

$$i_L(t) = -(G + \lambda_1 C) A_1 e^{\lambda_1 t} - (G + \lambda_2 C) A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

De tweede beginvoorwaarde op $t = 0$ geeft

$$-(G + \lambda_1 C) A_1 - (G + \lambda_2 C) A_2 = i_L(0). \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$A_1 = \frac{-1}{(\lambda_1 - \lambda_2)C} \{(G + \lambda_2 C)u_C(0) + i_L(0)\} \quad \text{en}$$

$$A_2 = \frac{-1}{(\lambda_2 - \lambda_1)C} \{(G + \lambda_1 C)u_C(0) + i_L(0)\}.$$

Substitutie van A_1 en A_2 in de vergelijkingen voor $u(t)$ geeft de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking in $u(t)$.

Zouden wij om de gedachten te bepalen de volgende waarden kiezen:

$C = 2F$, $G = 5S$ en $L = \frac{1}{2}H$, terwijl voor de condensatorspanning $u_C(0) = -1V$ en de spoelstroom $i_L(0) = -11A$ gekozen wordt, dan zal de karakteristieke vergelijking worden

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0,$$

zodat de eigenfrequenties zijn:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Dan is

$$u(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Met $u(0) = A_1 + A_2 = -1$ en met

$$i_L(0) = -4A_1 - A_2 = -11,$$

volgt $A_1 = 4$ en $A_2 = -5$, zodat de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking luidt

$$u(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t} - 5e^{-2t} \quad \text{V.}$$

Deze functie $u(t)$ is geschetst in fig.174.

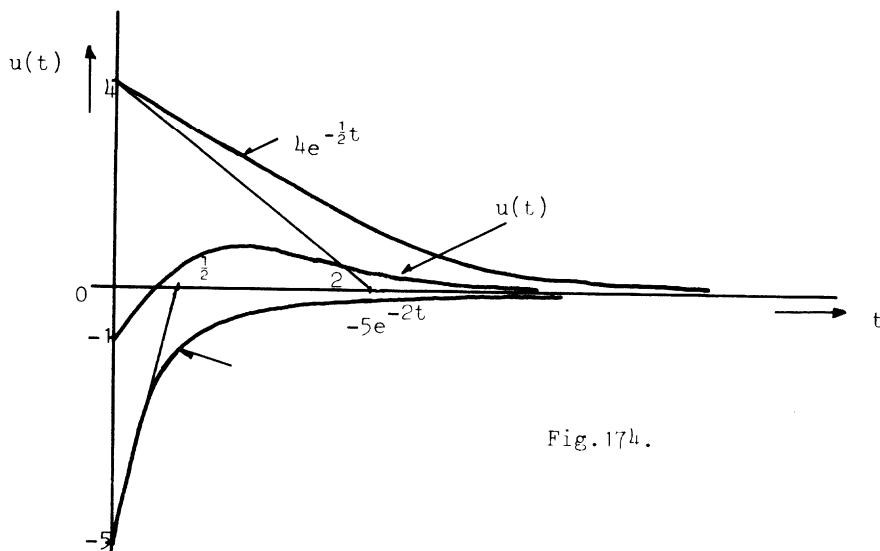


Fig.174.

Wij zien dat weliswaar het teken van $u(t)$ éénmaal verandert maar dat er eigenlijk geen sprake is van een trilling in de ware zin van het woord. Niettemin spreken wij ook in dit geval van een vrije trilling, net als bij een eerste-orde systeem (zie § 10.1.).

De trilling is overgedempt en aperiodisch.

Merk op dat de eigenfrequenties corresponderen met de polen van $Y(\lambda)$ terwijl deze in het complexe frequentievlak liggen als in fig. 172a.

10.7.3. Het geval dat $D = 0$; het kritisch gedempte geval.

De beide wortels vallen samen en zijn negatief reëel:

$$\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda).$$

Volgens de procedure onder 10.7.2. zou $u(t)$ bestaan uit

$$u(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} \quad \text{of}$$

$$u(t) = (A_1 + A_2) e^{\lambda t} \quad \text{en met } A = A_1 + A_2$$

$$u(t) = A e^{\lambda t}.$$

Er zou hier maar sprake zijn van één integratie-constante A in plaats van twee. Dit is in strijd met het feit, dat het hier toch een tweede orde systeem betreft.

Hier ligt dus een probleem.

Uit de theorie van de differentiaalvergelijkingen blijkt dat wij in dit geval een andere aanpak nodig hebben. Wij komen op dit probleem in het volgende studiejaar terug. Het zal dan blijken dat het verloop van $u(t)$ niet wezenlijk verschilt van het verloop geschetst in fig. 174 van het aperiodische geval, mits het netwerk passief is.

10.7.4. Het geval dat $D < 0$; het periodische geval.

De oplossing voor $u(t)$ bestaat uit de som van twee exponentiële functies met toegevoegd complexe exponenten:

$$\lambda_1^* = \lambda_2^* \quad , \quad \text{ofwel } \lambda_1 = \sigma + j\omega \quad \text{en}$$

$$\lambda_2 = \sigma - j\omega .$$

$$u(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t},$$

$$u(t) = e^{\sigma t} \{A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}\}.$$

Nu is $u(t)$ een reële functie en $e^{-j\omega t} = \{e^{j\omega t}\}^*$ voor alle t zodat $A_2 = A_1^*$.

Stellen wij $A_1 = A$ dan volgt

$$u(t) = e^{\sigma t} \{A e^{j\omega t} + A^* e^{-j\omega t}\},$$

ofwel

$$u(t) = 2e^{\sigma t} \operatorname{Re}\{A e^{j\omega t}\},$$

$$u(t) = 2e^{\sigma t} |A| \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \arg A.$$

Stellen wij $2|A| = |U|$, dan volgt

$$u(t) = |U| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi).$$

Volgens de oplossing van de karakteristieke vergelijking is $\sigma = -\frac{G}{2C} < 0$, zodat de oplossing een gedempte trilling is met een frequentie

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}.$$

In de oplossing $u(t) = |U| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ volgen σ en ω uit de wortels van de karakteristieke vergelijking, daarentegen moeten de waarden $|U|$ en ϕ nog bepaald worden. Daartoe hebben wij de beide beginvoorwaarden nodig; dit is een gevolg van het feit dat we met een tweede orde-systeem te maken hebben. Indien op $t = 0$ bekend zijn $u_C(0) = u(0)$ en $i_L(0)$, kunnen wij schrijven

$$u(0) = |U| \cos(\phi); \quad (1)$$

voor de spoelstroom $i_L(t)$ geldt

$$i_L(t) = -i_G(t) - i_C(t)$$

$$i_L(t) = -G|U| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) - \sigma C|U| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) + \omega C|U| e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi),$$

$$i_L(0) = -|U|\{(G + \sigma C)\cos(\phi) - \omega C \sin(\phi)\} ; \quad (2)$$

uit (1) en (2) volgt

$$|U| = \frac{1}{\omega C} \left\{ \{(G + \sigma C)u(0) + i_L(0)\}^2 + \{\omega C u(0)\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

en

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega C u(0)}{(G + \sigma C)u(0) + i_L(0)} = \arctan \frac{i_L(0) + (G + \sigma C)u(0)}{\omega C u(0)} .$$

Kiezen wij bv. de volgende numerieke waarden:

$$C = \frac{1}{2}F, \quad G = 1S \quad \text{en} \quad L = \frac{2}{37}H,$$

terwijl voor de condensatorspanning $u_C(0) = 2V$ en de spoelstroom $i_L(0) = 0A$

gekozen wordt, dan zal de karakteristieke vergelijking worden

$$\lambda^2 + 2\lambda + 37 = 0.$$

De eigenfrequenties zijn $\lambda_{1,2} = -1 \pm 6j$ ($\sigma < 0$).

De algemene oplossing is

$$u(t) = e^{-t}(Ae^{+6jt} + A^*e^{-6jt}) \quad \text{met} \quad 2|A| = |U|$$

$$= |U|e^{-t}\cos(6t + \phi).$$

Wij moeten nu nog bepalen $|U|$ en ϕ .

Op $t = 0$ is $u(0) = |U| \cos \phi$. Voor de spoelstroom kan worden geschreven

$$i_L(t) = -|U|e^{-t}\cos(6t + \phi) - \frac{1}{2}\{-|U|e^{-t}\cos(6t + \phi) - 6|U|e^{-t}\sin(6t + \phi)\},$$

$$i_L(0) = -\frac{1}{2}|U|\cos(\phi) + 3|U|\sin(\phi).$$

Met de gegeven beginvoorwaarde volgt dan

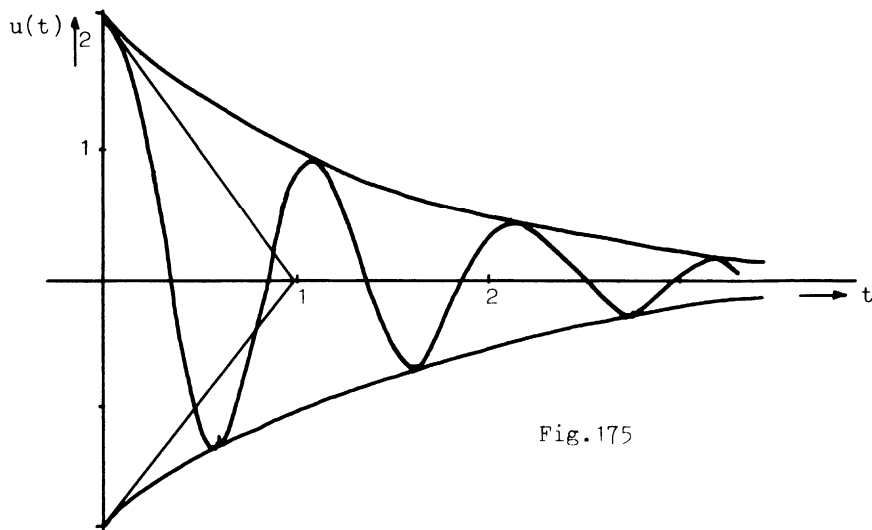
$$|U|\cos(\phi) = 2 \quad \text{en} \quad -\frac{1}{2}|U|\cos(\phi) + 3|U|\sin(\phi) = 0.$$

Hieruit volgt $\phi = \arctan\left(\frac{1}{6}\right)$ en $|U| = \frac{1}{3} \sqrt{37} \approx 2$,

zodat de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking voor dit periodische geval luidt

$$u(t) = 2e^{-t}\cos\left(6t + \arctan\frac{1}{6}\right).$$

Deze functie is geschetst in fig.175.



Wij zien, dat hier wel sprake is van een trilling (gedempt) in de ware zin van het woord. Deze vrije trilling is periodisch. Merk op, dat de eigenfrequenties corresponderen met de polen van $Y(\lambda)$ terwijl deze in het complexe frequentie-vlak liggen als in fig.172c.

10.8.

10.8.1. Tot dusverre beschouwden wij eenvoudige netwerken en onderzochten de spanning-stroom relatie aan een klemmenpaar; wij onderzochten $Z(\lambda)$ en $Y(\lambda)$ van netwerken waarvan het gedrag kon worden beschreven met één differentiaalvergelijking.

Bij het analyseren van een meer ingewikkeld lineair netwerk (volgens bv. de maas-, of knooppuntsmethode) wordt in het algemeen een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde en met constante coëfficiënten verkregen. Als de vergelijkingen zodanig geordend worden dat alle bronsterkten in het rechterlid staan en alle onbekenden in het linkerlid, dan zien de n differentiaalvergelijkingen in de n onbekenden er als volgt uit. De differentiaalvergelijkingen zijn van de tweede orde daar in het algemeen zowel spoelen als condensatoren in serie in iedere maas kunnen voorkomen.

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \dots) + \frac{d}{dt}(b_{k1}\xi_1 + b_{k2}\xi_2 + \dots) + (c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2 + \dots) =$$

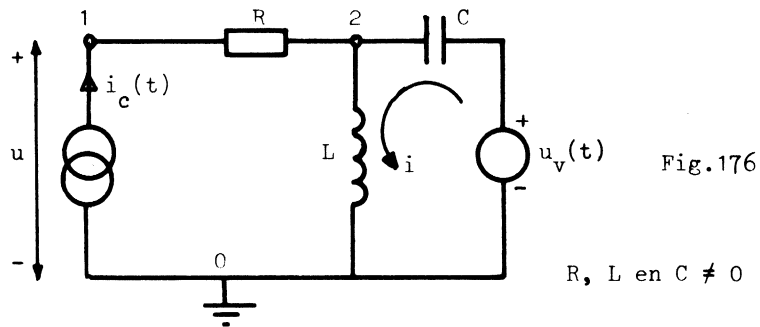
$$\frac{d^2}{dt^2}(p_{k1}\eta_1 + p_{k2}\eta_2 + \dots) + \frac{d}{dt}(q_{k1}\eta_1 + q_{k2}\eta_2 + \dots) + (r_{k1}\eta_1 + r_{k2}\eta_2 + \dots)$$

waarin $k = 1, 2, \dots, n$.

Alle a, b, c, p, q en r zijn constanten.

De ξ 's zijn de onbekende stromen en spanningen en de η 's zijn de bekende bronsterkten.

Voorbeeld



Voor de rechter-maas geldt:

$$L \frac{di}{dt} + L \frac{di_c}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u_v. \tag{1}$$

Voor knooppunt 1 geldt

$$G u_{12} = i_c \text{ met } u_{12} = u_{10} + u_{02} = u - u_{20}. \text{ Er volgt}$$

$$G u - G u_{20} = i_c.$$

Nu is $u_{20} = L \frac{d(i + i_c)}{dt}$, zodat

$$G u - GL \frac{di}{dt} = i_c + GL \frac{di_c}{dt}. \tag{2}$$

Differentiëren wij vergelijking (1), dan volgt

$$\frac{d^2}{dt^2} (Li) + \frac{d}{dt} (0) + \left(\frac{1}{C} i\right) = \frac{d^2}{dt^2} L(-i_c) + \frac{d}{dt} (u_v) + (0) \tag{3}$$

terwijl (2) geeft

$$\frac{d}{dt} (-GLi) + (G u) = \frac{d}{dt} (GLi_c) + (i_c). \quad (4)$$

De vergelijkingen (3) en (4) geven gelijktijdig (simultaan) een beschrijving van het gedrag van het netwerk.

Dit stelsel simultane differentiaalvergelijkingen heeft inderdaad de vorm bedoeld onder 10.8.1.

10.8.2. Indien in het geval beschreven onder 10.8.1. de bronsterkten

zijn van de vorm $\eta_k = H_k e^{\lambda t}$ dan bestaat er een oplossing van deze vergelijkingen van de vorm $\xi_k = E_k e^{\lambda t}$ waarin E_k gegeven wordt door de lineaire algebraïsche vergelijkingen, die wij vinden uit de differentiaalvergelijking en wanneer wij daarin vervangen

$$\frac{d^n}{dt^n} \text{ door } \lambda^n \quad n = 1, 2 \dots$$

$$\xi_k \text{ door } E_k \quad \text{en}$$

$$\eta_k \text{ door } H_k.$$

Deze n algebraïsche vergelijkingen in n onbekenden kunnen in het algemeen worden opgelost zodat E_k en H_k bepaald kunnen worden.

Voorbeeld

In het voorbeeld onder 10.8.1. worden de vergelijkingen (3) en (4)

$$\left(\lambda^2 L + \frac{1}{C}\right) I = -\lambda^2 LI_c + \lambda U_v \quad \text{en}$$

$$-\lambda GLI + GU = (\lambda GL + 1) I_c,$$

of in de matrix-vorm

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 L + \frac{1}{C} & 0 \\ -\lambda GL & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda^2 L & \lambda \\ \lambda GL + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_c \\ U_v \end{bmatrix}.$$

Deze vergelijkingen kunnen in het algemeen worden opgelost en I en U kunnen worden bepaald.

De vrije trillingen voor dit netwerk kunnen worden gevonden met $I_c = 0$ en $U_v = 0$ uit:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 L + \frac{1}{C} & 0 \\ -\lambda GL & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = 0 \quad \text{voor } I \text{ en } U \neq 0,$$

d.w.z.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 L + \frac{1}{C} & 0 \\ -\lambda GL & G \end{bmatrix} = 0 \quad \text{of } \lambda^2 L + \frac{1}{C} = 0.$$

Dit is de karakteristieke vergelijking voor de vrije trillingen in dit netwerk. Bij de oplossing voor I en U volgens

$$\begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ \lambda GL & \lambda^2 L + \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda^2 L & \lambda \\ \lambda GL + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_c \\ U_v \end{bmatrix} \times \frac{1}{G(\lambda^2 L + 1/C)},$$

ziet men dat deze karakteristieke vergelijking een belangrijke rol speelt.

Keren wij weer terug naar de algemene vergelijking uit 10.8.1. voor bronsterkten $\equiv 0$, dan is

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \dots) + \frac{d}{dt}(b_{k1}\xi_1 + b_{k2}\xi_2 + \dots) + (c_{k1}\xi_1 + c_{k2}\xi_2) \equiv 0$$

met $k = 1, 2, \dots, n$

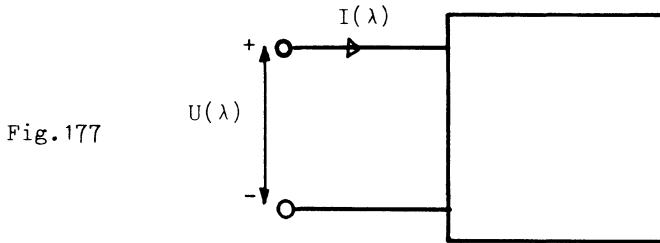
Dan vindt men via $\xi_k = \Xi_k e^{\lambda t}$:

$$\det \left[\lambda^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_{nn} \end{bmatrix} \right] = 0$$

als $\Xi_k \neq 0$ voor alle $k = 1, \dots, n$.

Dit is een algemene vorm voor de karakteristieke vergelijking. Wij komen op dit probleem nog uitvoerig terug in het college Elektrische Netwerken II.

In de voorgaande beschouwingen onderzochten wij meestal netwerkfuncties $H(\lambda)$ die de verhouding waren van de stroom en de spanning aan één klemmenpaar van een netwerk; dus volgens fig.177.

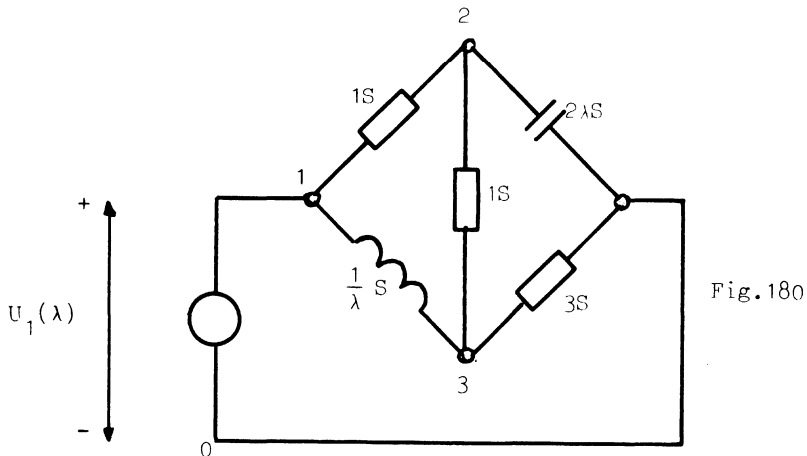


De netwerkfunctie is dan een ingangsimpedantie of -admittantie. Wat eveneens voorkomt is een verhouding tussen een grootheid behorend bij één klemmenpaar, tot die behorend bij een ander klemmenpaar.

In deze gevallen spreekt men van een overdrachtsimpedantie, -admittantie als het een verhouding $\frac{U_2(\lambda)}{I_1(\lambda)}$ of $\frac{I_2(\lambda)}{U_1(\lambda)}$ betreft. Men spreekt van een

spannings- of stroomoverdrachtsfunctie als men de dimensieloze verhoudingen $\frac{U_1(\lambda)}{U_2(\lambda)}$ of $\frac{I_1(\lambda)}{I_2(\lambda)}$ beschouwt.

10.8.3. Voorbeeld



De knooppuntsvergelijkingen voor de knooppunten 2 en 3 zijn:

$$0 = (2 + 2\lambda) U_{20} - U_{30} - U_{10} \quad \text{en}$$

$$0 = -U_{20} + (4 + \frac{1}{\lambda}) U_{30} - \frac{U_{10}}{\lambda} .$$

Hieruit volgt

$$U_{20} = \frac{2(2\lambda + 1)}{8\lambda^2 + 9\lambda + 2} U_{10} ,$$

$$H(\lambda) = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{2(2\lambda + 1)}{8\lambda^2 + 9\lambda + 2} .$$

Deze $H(\lambda)$ is een voorbeeld van een spanningsoverdrachtsverhouding.

10.8.4. In het algemeen zijn dergelijke functies quotiënten van polynomen in λ :

$$H(\lambda) = A \frac{T(\lambda)}{N(\lambda)} .$$

Na ontbinding in factoren van de eerste graad van teller en noemer kan men $H(\lambda)$ schrijven als een quotiënt van producten

$$H(\lambda) = A \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_{zk})}{\prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_{pk})} .$$

Er zijn n factoren in de teller en m factoren in de noemer. A is een constante.

Voor elke $\lambda = \lambda_{zk}$, ($k = 1 \dots n$) is $H(\lambda) = 0$;

voor deze complexe frequenties heeft $H(\lambda)$ dus een nulpunt.

Voor elke $\lambda \rightarrow \lambda_{pk}$, ($k = 1 \dots m$) is $H(\lambda) \rightarrow \infty$;

voor deze complexe frequenties heeft $H(\lambda)$ dus een pool.

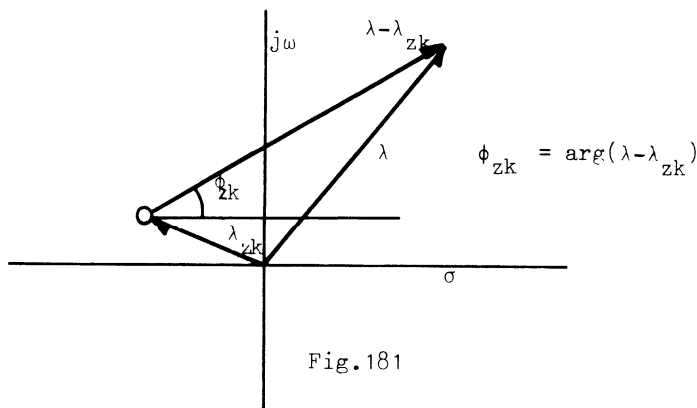
Elke term $(\lambda - \lambda_{zk})$ is te schrijven als

$$|\lambda - \lambda_{zk}| \exp \left[j \arg(\lambda - \lambda_{zk}) \right] ,$$

zodat men ook kan schrijven

$$H(\lambda) = A \frac{\prod_{k=1}^n |\lambda - \lambda_{zk}|}{\prod_{k=1}^m |\lambda - \lambda_{pk}|} \exp j \left\{ \sum_{k=1}^n \arg(\lambda - \lambda_{zk}) - \sum_{k=1}^m \arg(\lambda - \lambda_{pk}) \right\} \cdot$$

Nu is bv. $|\lambda - \lambda_{zk}|$ de afstand d_{zk} in het complexe vlak tussen de punten λ en λ_{zk} en is $\arg(\lambda - \lambda_{zk}) = \phi_{zk}$ de hoek die de wijzer gericht van λ_{zk} naar λ maakt met de positief reële as. Zie fig.181.



Wij kunnen dus om $|H(\lambda)|$ te berekenen voor een bepaalde waarde van λ , volstaan met het product van A en de afstanden d_{zk} ($k=1\dots n$) te delen door het product van de afstanden d_{pk} ($k=1\dots m$).

Het argument van $H(\lambda)$ voor de waarde van λ volgt uit

$$\sum_{k=1}^n \phi_{zk} - \sum_{k=1}^m \phi_{pk} \cdot$$

10.8.5. Voorbeeld

$$\text{Beschouw de functie van } H(\lambda) = 3 \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)}{\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6} = \frac{T(\lambda)}{N(\lambda)} \cdot$$

Na ontbinden in factoren van $T(\lambda)$ en $N(\lambda)$ vinden wij

$$H(\lambda) = 3 \frac{\lambda^2(\lambda + 1 + 2j)(\lambda + 1 - 2j)}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)} \cdot$$

De nulpunten zijn:

$$\lambda_{z_{1,2}} = 0, \text{ een dubbel nulpunt,}$$

$$\lambda_{z_3} = -1-2j ,$$

$$\lambda_{z_4} = -1+2j .$$

De polen zijn

$$\lambda_{p_1} = -1 ,$$

$$\lambda_{p_2} = -2 ,$$

$$\lambda_{p_3} = -3 ,$$

$$\lambda_{p_4} = \infty .$$

In het complexe frequentievlak ingetekend, levert dit fig.182.

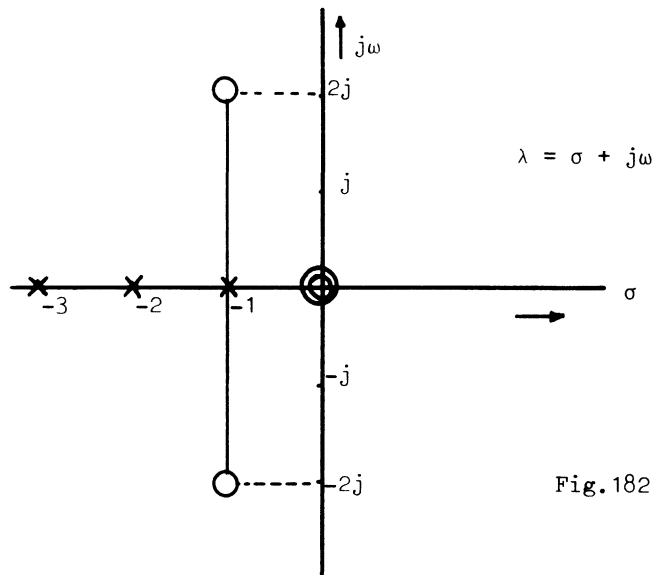


Fig.182

Indien wij $H(\lambda)$ moeten bepalen bv. voor $\lambda = 1 + j$ kunnen wij dit doen door invullen van $(1+j)$ in de functie $H(\lambda)$ maar wij kunnen ook $|H(\lambda)|$ en $\arg\{H(\lambda)\}$ voor $\lambda = 1+j$ bepalen door uit te gaan van het polen- en nulpuntenbeeld in het complexe frequentievlak in fig.183.

Door opmeten in dit diagram blijkt de afstand van het nulpunt in de oorsprong tot het punt $\lambda = 1+j$ te zijn $d_{z1} \approx 1,4$,

evenzo $d_{z2} \approx 1,4$

$d_{z3} \approx 3,6$

$d_{z4} \approx 2,2$.

Voor de afstand van de polen tot het punt $\lambda = 1+j$ geldt $d_{p1} \approx 2,2$

$d_{p2} \approx 3,2$

$d_{p3} \approx 4,2$.

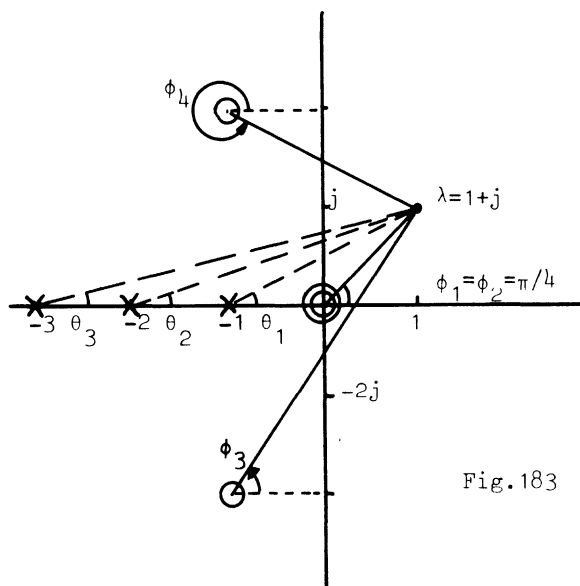


Fig.183

Elke aldus opgemeten afstand d , correspondeert met de modulus van een factor in $T(\lambda)$ of $N(\lambda)$; bv. is

$|\lambda + 1 + 2j|$ voor $\lambda = 1+j$ gelijk aan de afstand d_{z3} .

Op deze manier volgt

$$|H(1+j)| \approx 3 \frac{1,4 \times 1,4 \times 3,6 \times 2,2}{2,2 \times 3,2 \times 4,2} = 1,6.$$

(Men vergeet de constante $A = 3$ niet !).

Het argument is te vinden als

$$\arg\{H(1+j)\} = 2 \times \frac{\pi}{4} + \phi_3 + \phi_4 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3.$$

Na opmeten blijkt voor $\lambda = 1+j$ het argument ϕ ongeveer gelijk te zijn aan 410° dus corresponderend met een gereduceerde hoek van $410^\circ - 360^\circ = 50^\circ$.

Het is duidelijk dat als wij een complexe frequentie λ kiezen in de omgeving van een nulpunt, $|H(\lambda)|$ klein zal zijn. Evenzo, zal $|H(\lambda)|$ in de omgeving van een pool juist groot wezen. Het complexe frequentievlak is een zeer waardevol hulpmiddel bij het zich aanschouwelijk voorstellen van het gedrag van $|H(\lambda)|$ bij verschillende frequenties λ .

10.8.6. Voorbeeld

De spanningsoverdracht van het netwerk van fig.184

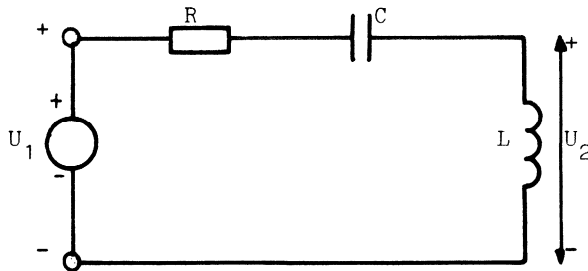


Fig.184

wordt gegeven door

$$H(\lambda) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\lambda^2 LC}{\lambda^2 LC + \lambda RC + 1}.$$

Het polen- en nulpuntenbeeld is gegeven in fig.185a terwijl in fig.185b door middel van een oppervlak boven het complexe frequentievlak is aangegeven de grootte van $|H(\lambda)|$ over het hele λ -vlak.

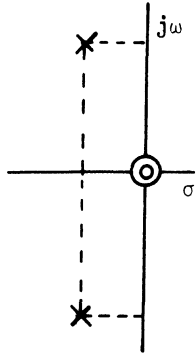


Fig.185a

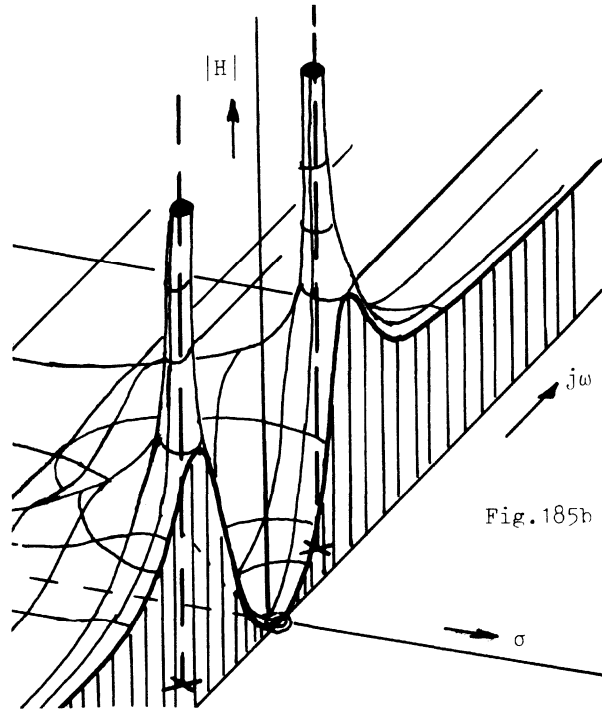


Fig.185b

Indien wij ons in het bijzonder interesseren voor het verloop van $|H(j\omega)|$ als functie van ω , dan is dit direct uit fig.185b. af te lezen. De doorsnijding van het vlak door de as $j\omega$ en de as $|H|$ met het geschetste oppervlak geeft die frequentie karakteristiek. Zie fig.186.

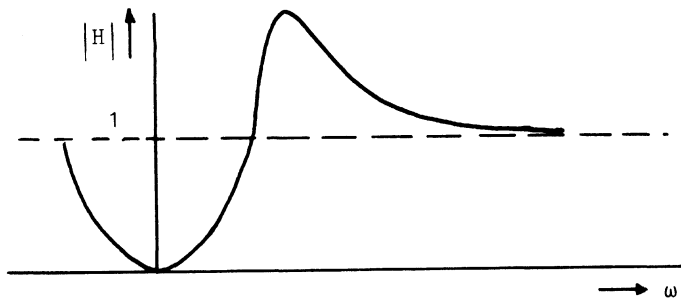


Fig.186

Opdracht: Bezie in dit verband ook eens hoe, zonder gebruik te maken van de stelling van Foster, de frequentie karakteristiek van fig. 168 kan worden bepaald.

Voor het verloop van het argument als functie van ω bestaat niet zo'n eenvoudig hulpmiddel, niettemin kan men voor het schema van fig.184 door inspectie van fig.185a de fasekarakteristiek schetsen. Dit is gebeurd in fig.187.

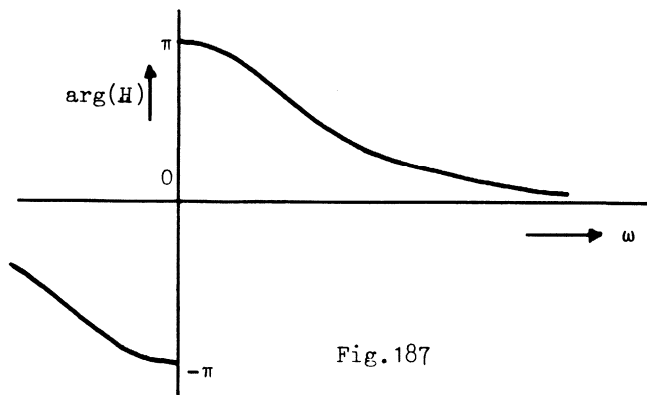


Fig.187

10.8.7. Betekenis van verschillende netwerkfuncties

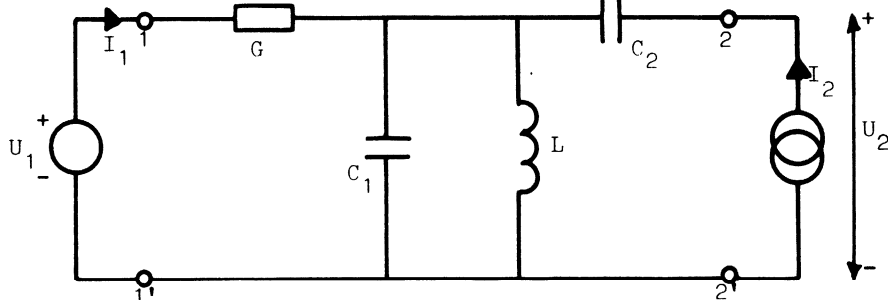


Fig.188

De bronnen van het netwerk volgens fig.188 hebben dezelfde complexe frequentie. De netwerkvergelijkingen kunnen worden geschreven

$$I_1 = \frac{\lambda G C_2 (\lambda^2 C_1 + 1/L)}{N} U_1 - \frac{\lambda^2 C_2 G}{N} I_2$$

$$U_2 = \frac{\lambda^2 C_2 G}{N} U_1 + \frac{\lambda^2 (C_1 + C_2) + \lambda G + 1/L}{N} I_2 ,$$

met $N = \lambda C_2 (\lambda^2 C_1 + \lambda G + 1/L)$.

Men kan deze betrekkingen gemakkelijk vinden door toepassing van het superpositiebeginsel en stroom- en spanningsdeling.

Wij zien dat N de gemeenschappelijke noemer is van alle termen. Indien $U_1 = 0$ en $I_2 = 0$ kunnen toch $I_1 \neq 0$ en $U_2 \neq 0$ zijn als $N = 0$. Dit is de karakteristieke vergelijking voor dit netwerk en de wortels ervan zijn de eigenfrequenties van de vrije trillingen. Dus

$$\lambda C_2 (\lambda^2 C_1 + \lambda G + 1/L) = 0.$$

Deze vergelijking is van de derde graad, omdat er drie energieën onafhankelijk van elkaar kunnen worden gekozen.

$\lambda^2 C_1 + \lambda G + 1/L = 0$ geeft de (toegevoegd complexe) eigenfrequenties van de GLC_1 -parallel-keten.

De frequentie $\lambda = 0$ vertegenwoordigt de gelijkspanning die zich blijvend op C_2 kan bevinden als in het netwerk volgens fig.188 de bronsterkten nul zijn. Wij onderzoeken nu de betekenis van de tellers van de verschillende termen.

$$a) \quad \frac{\lambda G C_2 (\lambda^2 C_1 + 1/L)}{\lambda C_2 (\lambda^2 C_1 + \lambda G + 1/L)} \left. \begin{matrix} I_1 \\ U_1 \end{matrix} \right\}_{I_2 = 0} = \frac{1}{Z_{11}} .$$

De gemeenschappelijke factor λC_2 in teller en noemer wordt niet uitgedeeld om duidelijk te laten blijken dat alle overdrachtsfuncties dezelfde noemerpolynoom bezitten.

Z_{11} is de ingangsimpedantie van het netwerk gezien aan de klemmen 1 en 1' terwijl de klemmen 2 en 2' geopend zijn. De teller van $1/Z_{11}$ is de karakteristieke polynoom van de vrije trillingen wanneer beide poorten (fig.189) open zijn. Deze teller heeft factoren die corresponderen met de resonantie van de kring LC_1 en met een gelijkspanning op de condensator C_2 . Derhalve is de teller van de vorm $K\lambda(\lambda^2 + 1/LC_1)$.

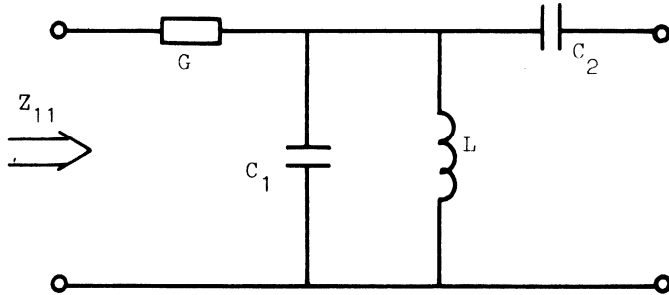


Fig.189

Voor $\lambda = 0$ echter, zijn teller en noemer van $\frac{1}{Z_{11}}$ beide nul; evenwel is $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \frac{I_1}{U_1} \right\}_{I_2 = 0} = G$. Dit is ook direct in te zien omdat de impedantie van L

voor gelijkstroom nul is, waardoor k gemakkelijk te bepalen is.

$$b) \frac{-\lambda^2 C_2 G}{C_2 (\lambda^2 C_1 + \lambda G + \frac{1}{L})} = \left\{ \frac{I_1}{I_2} \right\}_{U_1 = 0}$$

Deze overdrachtsfunctie is de verhouding van de stroom I_1 en I_2 in het netwerk van fig.190 waarbij de klemmen 1 en 1' zijn kortgesloten ($U_1 = 0$).

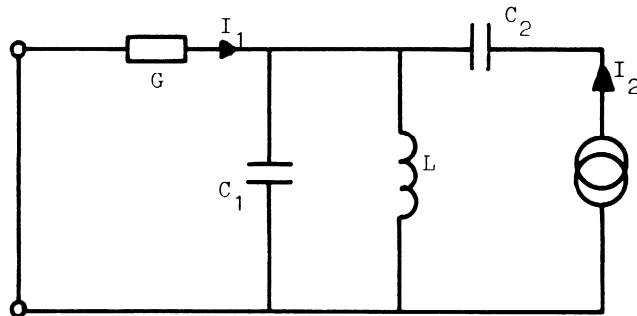
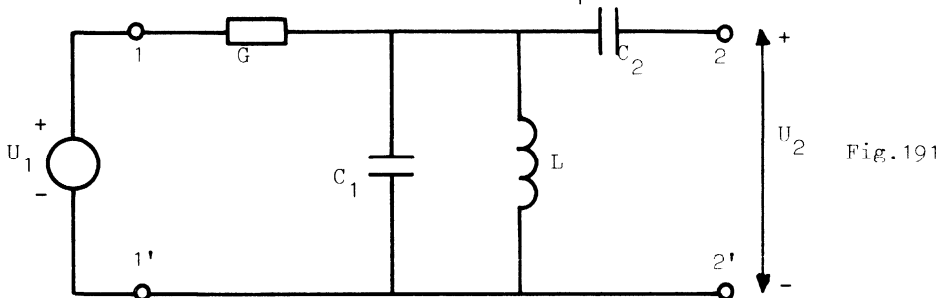


Fig.190

De factoren van de tellerpolynoom kunnen wij bepalen door de vrije trillingen te onderzoeken onder de omstandigheden dat $I_1 = 0$, $U_1 = 0$, terwijl $I_2 \neq 0$ is. Hoe deze voorwaarde bereikt wordt is hier niet belangrijk. (In feite kan dit geschieden, althans bij benadering, m.b.v. een operationele versterker). Het is dan duidelijk dat de spanning over de spoel nul moet zijn, zodat i_2 een constante stroom moet zijn, d.w.z. $\lambda = 0$. Er zijn twee vrije trillingen mogelijk, nl. één waarbij een constante stroom vloeit, en één waarbij een constante spanning over C_2 aanwezig is. Dit verklaart het dubbele nulpunt in de oorsprong van de teller van de stroomoverdrachts-

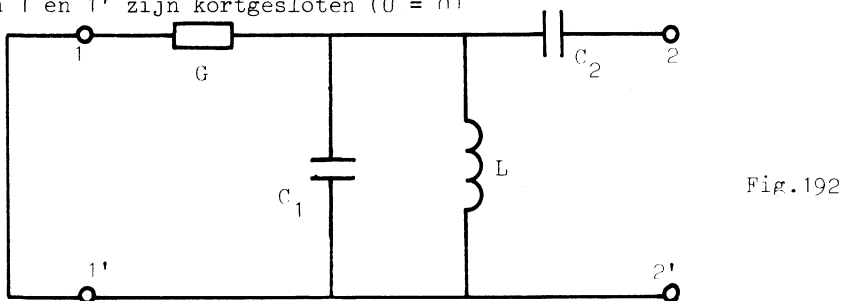
verhouding. Daar de noemer een enkelvoudig nulpunt in de oorsprong heeft, heeft de overdrachtsverhouding slechts een enkelvoudig nulpunt. Hoewel het lijkt alsof C_2 de stroom I_2 blokkeert is dit toch niet zo, immers C_2 wordt door de bron opgeladen; alle stroom vloeit door L . Omdat i_2 constant is, neemt u_2 lineair met de tijd toe volgens $u_2 = \frac{i_2}{C_2} t$. Dit is echter geen exponentiële functie en als zodanig valt deze buiten het bestek van de theorie, die in dit college gegeven wordt.

- c) De overdrachtsfunctie $\left[\frac{U_2}{U_1} \right]_{I_2=0}$ wordt beschouwd aan de hand van fig.191, waarbij de klemmen 1 en 1' zijn kortgesloten ($U_1 = 0$).



Deze functie is (op een minteken na) gelijk aan die welke wij onder b) beschouwen en heeft dus ook een enkelvoudig nulpunt voor $\lambda = 0$. Dit komt omdat de spoel als een kortsluiting voor gelijkstroom werkt.

- d) De impedantiefunctie $1/Y_{22} = \left[\frac{U_2}{I_2} \right]_{U_1=0}$ wordt gevonden met fig.192 waarbij de klemmen 1 en 1' zijn kortgesloten ($U = 0$)



De nulpunten van de teller van deze functie volgen uit de vrije trillingen onder de voorwaarde dat ook $U_2 = 0$. Wij hebben dan een resonantiekring met C_1 , C_2 , L , G parallel, zodat de karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2(C_1 + C_2) + \lambda G + 1/L = 0.$$

Wij beschouwen hier de voor dit netwerk kenmerkende impedantie-, admittantie- en overdrachtsfuncties en onderzochten de polen en nulpunten daarvan. Wij zullen in de volgende paragraaf nagaan wat er gebeurt als de complexe frequentie van een bron samenvalt met een nulpunt of met een pool van de netwerkfunctie.

10.8.8. Komplexe resonantie

Wij onderzoeken de schakeling van fig.193.

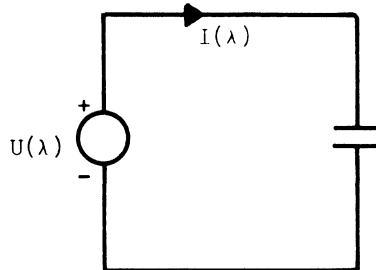


Fig.193

Kiezen wij nu de bronfrequentie gelijk aan de frequentie van het nulpunt van de netwerkfunctie $Y(\lambda)$ dan is het duidelijk dat $I(\lambda) = 0$. Een condensator kan nl. geen gelijkstroom voeren indien hij op een gelijkspanningsbron is aangesloten.

Indien de frequentie van de excitatie samenvalt met een nulpunt van de netwerkfunctie is de responsie nul.

Bezien wij nu de schakeling van fig.194, waarbij

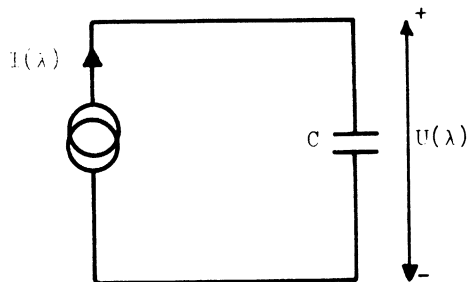


Fig.194

de excitatie een stroom is en de responsie een spanning, dan geldt

$$U = Z(\lambda) I.$$

$Z(\lambda)$ heeft een pool voor $\lambda = 0$; immers $Y(\lambda)$ had een nulpunt voor gelijkspanningsexcitatie.

Wij zullen onderzoeken wat er gebeurt als de frequentie van de excitatie samenvalt met een pool van de netwerkfunctie.

De differentiaalvergelijking voor het netwerk van fig.194 is $i = C \frac{du}{dt}$.

Als de bronfrequentie $= 0$ is, betekent dit dat $i(t) = K$, constant is.

Voor de responsie u vinden wij dan

$$u(t) = \frac{K}{C} t + A$$

Indien op het tijdstip $t = 0$, $u(0) = 0$ was, is $A = 0$ zodat

$$u(t) = Bt, \text{ waarin } B \text{ een constante is.}$$

De responsie is dus een lineair met de tijd toenemend signaal dat een gevolg is van het feit dat aan de condensator voortdurend lading wordt toegevoegd, waardoor de spanning voortdurend stijgt. De in de condensator opgeslagen energie wordt voortdurend vergroot.

Wij onderzoeken de schakeling van fig.195.

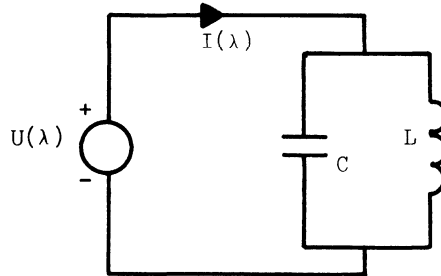


Fig.195

Wij weten dat de parallelkring in resonantie is voor $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; dit volgt uit

$$Y(\lambda) = \frac{\lambda^2 LC + 1}{\lambda L} = 0, \quad I = Y(\lambda) U.$$

Kiezen wij de bronfrequentie $\lambda = j\omega_0$ gelijk aan de frequentie van het nulpunt van $Y(\lambda)$, dan is het duidelijk dat $I(\lambda) = 0$.

Ook hier is de responsie nul bij samenvallen van de excitatie-frequentie en een nulpunt van de netwerkfunctie.

Bezien wij nu de schakeling van fig.196 waarbij de excitatie een stroom is en de responsie een spanning, dan geldt

$$U(\lambda) = \frac{\lambda L}{\lambda^2 LC + 1} I(\lambda).$$

Kiezen wij $\lambda = j\omega_0$, dan valt de bronfrequentie samen met een pool van de

netwerkfunctie, dus

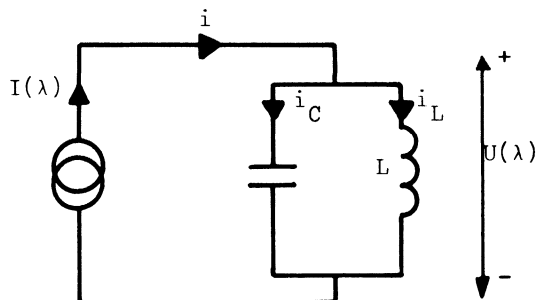


Fig.196

met de resonantiefrequentie van de parallelkring.

Voor de schakeling van fig.196 geldt:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_C}{dt} + \frac{di_L}{dt}.$$

Met $i_C = C \frac{du}{dt}$ en $u = L \frac{di_L}{dt}$ en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, volgt

$$\frac{1}{C} \frac{di}{dt} = \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{LC}, \text{ een tweede orde differentiaalvergelijking in } u.$$

Indien wij de bronsterkte $i = |I| \sin(\omega_0 t)$ kiezen, dus met een frequentie gelijk aan de resonantiefrequentie van de kring, dan wordt aan de differentiaalvergelijking voldaan door $u(t) = \frac{1}{2} \frac{|I|}{C} t \sin(\omega_0 t)$.

Wij zien, dat opnieuw een evenredig met de tijd toenemende responsie (nl. de "amplitude", de coëfficiënt van $\sin \omega_0 t$) ontstaat.

Opdracht: Ga na dat de gegeven oplossing inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Dat u groter wordt voor toenemende tijd is ook als volgt te zien.

Indien de LC-parallelkring in resonantie is, bij bronsterkte nul, is $i \equiv 0$ voor $u \neq 0$. De in de kring opgeslagen energie is dan constant.

Indien de bronsterkte ongelijk nul is, zal bij $u \neq 0$ voortdurend energie aan de kring worden toegevoerd waardoor de responsie groter wordt.

Men spreekt van komplexe resonantie als de complexe frequentie van de bron gelijk is aan een eigenfrequentie van het netwerk; als λ dus samenvalt met een pool of een nulpunt.

Het is te bewijzen, dat indien de bronfrequentie van de excitatie $E(\lambda)$ samenvalt met een pool van de netwerkfunctie $H(\lambda)$, de responsie $R(\lambda)$ waarbij

$$R(\lambda) = H(\lambda).E(\lambda),$$

termen zal bevatten waarin t als factor voorkomt. Een dergelijk bewijs kan worden geleverd als de theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen is behandeld; in het bijzonder volgt dit resultaat op eenvoudige wijze, indien daarbij de oplossingsmethode van Laplace wordt gekozen.

Opmerking: De hele theorie van de immittanties, zoals wij die in dit college hebben ontwikkeld, geldt slechts voor exponentiële functies.

Dus functies als

$$u(t) = \text{const} \times t \quad \text{en}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{|I|}{C} t \sin(t) \quad \text{en}$$

in het algemeen

$$u(t) = \text{Re}(tUe^{\lambda t})$$

vallen eigenlijk buiten het bestek van onze beschouwingen.

Wij zullen daarom op dit probleem nu niet verder ingaan.